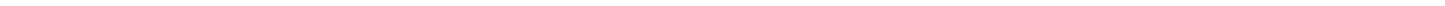

Note di QFT
Elettrodinamica Quantistica

FEDERICO MANZONI
Note basate sulle lezioni del prof. Mauro Lucio Papinutto

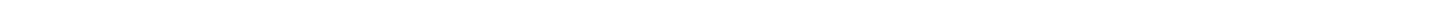


Indice

I	Preliminari di teoria dei campi	7
1	L'integrale sui cammini	9
1.1	L'integrale sui cammini in Meccanica Quantistica	10
1.1.1	Analogia con la meccanica statistica e azione euclidea	12
1.1.2	Funzioni di Green e funzionale generatore	13
1.2	Il paths integral in QFT	15
1.2.1	Funzioni di Green e funzionale generatore per teorie di campo	15
1.2.2	Cenni al formalismo di Wightman e al formalismo di Schwinger	18
2	Rappresentazione spettrale e sviluppo perturbativo dei propagatori	21
2.1	La rappresentazione di Källén-Lehmann	22
2.2	Sviluppo perturbativo delle funzioni di Green	24
2.2.1	Relazione tra la rappresentazione di Källén-Lehmann e lo sviluppo perturbativo	27
3	Introduzione alla teoria dello scattering e matrice S	31
3.1	Stati <i>in</i> e <i>out</i>	32
3.2	Matrice di scattering, rate e sezione d'urto	34
3.2.1	La matrice di scattering e l'operatore S	34
3.2.2	Invarianza di Lorentz e proprietà di unitarietà della matrice S	35
3.2.3	Sezione d'urto e larghezza di decadimento	37
3.3	Formule di Lehmann-Symanzik-Zimmermann e diagrammi per la matrice S	39
3.3.1	Formule di riduzione LSZ	39
3.3.2	Diagrammi di Feynman per la matrice di scattering	42
4	Campo elettromagnetico e sua quantizzazione	45
4.1	Scelta di gauge, funzionale generatore e propagatore fotonico	46
4.1.1	Scelta di gauge e metodo di Faddeev-Popov	46
4.1.2	Funzionale generatore e propagatore fotonico	48
4.2	Quantizzazione covariante alla Gupta-Bleuler	50
5	Campo spinoriale di Dirac e sua quantizzazione	53
5.1	Campi fermionici come oscillatori	54
5.1.1	Variabili anticommutanti di Grassman	54
5.2	Funzionale per il campo di Dirac e propagatore fermionico	55
5.3	Particelle ed antiparticelle	57

6	Simmetrie	59
6.1	Simmetrie e leggi di conservazione	60
6.2	Invarianza di gauge ed accoppiamento con il campo EM	62
6.3	Simmetrie in teoria dei campi	62
6.3.1	Excursus nella meccanica quantistica	63
6.3.2	Equazioni di Schwinger-Dyson e identità di Ward	63
II	Elettrodinamica spinoriale: costruzione, rinormalizzazione ed applicazio-	67
7	Elettrodinamica quantistica spinoriale	69
7.1	Funzionale generatore e suoi diagrammi di Feynman	70
7.2	Rappresentazione spettrale e formule di riduzione	72
7.2.1	La rappresentazione di Källén-Lehmann per il campo di Dirac	72
7.2.2	La rappresentazione di Källén-Lehmann per il campo fotonico	74
7.2.3	Formule di riduzione per la spQED	74
7.3	Identità di Ward-Takahashi per la spQED	75
7.4	Diagrammi di Feynman per la matrice di scattering	77
7.5	Fotoni virtuali	79
8	Introduzione alla rinormalizzazione: generalità e caso della spQED	83
8.1	La rinormalizzazione e la regolarizzazione	84
8.2	I propagatori e il vertice	84
8.2.1	Il propagatore fermionico	85
8.2.2	Il propagatore fotonico	87
8.2.3	Il vertice di interazione $ee\gamma$	90
8.3	La rinormalizzazione della carica elettrica	91
9	Applicazioni importanti della spQED	93
9.1	Scattering in campo esterno e bremsstrahlung	94
9.2	Polarizzazione del vuoto e calcolo del tensore di correzione ad un loop al propagatore fotonico	97
9.2.1	Integrali tipici e parametri di Feynman	97
9.2.2	Calcolo ad un loop del tensore di polarizzazione del vuoto	99
9.3	Il momento magnetico anomalo dei leptoni	101
9.3.1	Il calcolo al primo ordine	102
9.4	Calcolo ad un loop dell'auto energia dei fermioni di Dirac	106
A	Lo spazio di Fock	109
B	Algebra esterna e algebra di Clifford	111
B.1	L'algebra esterna	111
B.2	L'algebra di Clifford	112
C	Un esempio del teorema di spin-statistica	115
D	Le simmetrie del vuoto ed il teorema di Coleman	117
E	Il teorema di Furry	119

F	La gamma e la beta di Eulero	121
F.1	La gamma di Eulero	121
F.2	La beta di Eulero	123
G	Dimostrazione $\frac{2-D}{D}I(s, D, 1) = -\frac{2s}{D}I(s, D, 2)$	125
H	Cenni sui detector per la rivelazione di fotoni	127
I	Decomposizioni di Gordon	131
J	I fattori di forma elettromagnetici	133
K	Calcolo dell'integrale nella variabile q_E dell'equazione (9.30)	135
L	Formalismo funzionale per gli oscillatori	137



Parte I

Preliminari di teoria dei campi

Capitolo 1

L'integrale sui cammini

Esistono molte formulazioni della meccanica quantistica; le più famose sono la formulazione ondulatoria di Schrödinger e la formulazione matriciale di Heisenberg; in questa sezione discuteremo la formulazione mediante integrale sui cammini dovuta a Feynman. Immaginiamo di avere una particella che si muove di moto unidimensionale dal punto x_a all'istante t_a al punto x_b all'istante t_b ; in meccanica quantistica l'ampiezza di transizione deve tener conto di tutti i possibili cammini che soddisfano le condizioni iniziali e al bordo. Tutti questi cammini pesano, in modulo, allo stesso modo mentre ognuno di essi concorrerà con una fase differente e queste fasi interferiranno (allo stesso modo di come funziona l'esperimento della doppia fenditura); abbiamo quindi

$$\langle b | e^{-i\hat{H}(t_b-t_a)} | a \rangle = \sum_{\text{cammini}} e^{i(\text{fase})} = \int D[x(t)] e^{i(\text{fase})}. \quad (1.1)$$

Formalmente la (1.1) è un funzionale, una mappa che associa uno scalare ad ogni funzione, e ci dice di integrare su tutti i possibili cammini (che sono funzioni del tempo) che soddisfano le richieste fatte. La domanda ora è, cosa mettiamo al posto della fase? Sappiamo che nel limite classico il cammino che verrà percorso è solo uno ed è quello che estremizza l'azione classica e sarà, in questo limite, l'unico contributo all'integrale funzionale; è spontaneo porre

$$\langle b | e^{-i\hat{H}(t_b-t_a)} | a \rangle = \int D[x(t)] e^{iS[x(t)]}. \quad (1.2)$$

Infatti nel caso in cui l'azione S (quindi le masse, i tempi, le dimensioni) sia enorme comparata con il "quanto" di azione (la costante di Planck) il contributo nella fase è molto grande; in questo caso variando il cammino di una quantità infinitesima sulla scala classica il cambiamento dell'azione rapportato alla scala della costante di Planck sarà molto grande e quindi la fase oscillerà molto rapidamente ed il contributo totale sarà nullo. In altre parole, per ogni cammino variato infinitesimamente sulla scala classica ne esisterà un altro la cui interferenza tra i due sarà completamente distruttiva. Invece per quel cammino che estremizza l'azione classica la variazione infinitesima (intesa sempre sulla scala classica) varierà, al meno al primo ordine, poco il valore dell'azione (sempre in rapporto alla costante di Planck) per cui i cammini immediatamente vicini al cammino classico saranno tutti in fase ed interferiranno in maniera costruttiva per dar vita al cammino "deterministico" che classicamente si osserva. E' interessante notare come il formalismo funzionale dia una dimostrazione a posteriori del principio di Hamilton; notiamo anche che, in accordo con i teoremi di incompletezza, per derivare il principio di Hamilton ci siamo dovuti muovere in una teoria più grande che però ha comunque dei postulati di partenza (la meccanica quantistica).

Vedremo nel prossimo paragrafo che forma ha l'integrale funzionale partendo da una descrizione hamiltoniana della dinamica, successivamente torneremo sui nostri passi e preferiremo una descrizione lagrangiana della dinamica, la quale mette in luce meglio i concetti di simmetria che utilizzeremo per proseguire nella trattazione della teoria dei campi.

1.1 L'integrale sui cammini in Meccanica Quantistica

Consideriamo l'ampiezza di transizione di un sistema a d dimensioni descritto da una hamiltoniana \hat{H} , funzione delle coordinate e dei momenti coniugati, che nel tempo T transisce dallo stato \mathbf{q}_0 allo stato \mathbf{q}_N . Il tempo T può essere decomposto in tante frazioni uguali per cui l'operatore di evoluzione sarà scrivibile come

$$e^{-i\hat{H}T} = e^{-i\hat{H}\epsilon} \dots e^{-i\hat{H}\epsilon} \quad (N \text{ volte}),$$

per cui l'ampiezza diventa

$$\langle \mathbf{q}_N | e^{-i\hat{H}T} | \mathbf{q}_0 \rangle = \langle \mathbf{q}_N | (e^{-i\hat{H}\epsilon})^N | \mathbf{q}_0 \rangle.$$

A questo punto inseriamo l'identità sotto forma di somma completa sugli autostati delle coordinate ottenendo

$$\langle \mathbf{q}_N | (e^{-i\hat{H}\epsilon})^N | \mathbf{q}_0 \rangle = \int d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_{N-1} \langle \mathbf{q}_N | e^{-i\hat{H}\epsilon} | \mathbf{q}_{N-1} \rangle \langle \mathbf{q}_{N-1} | \dots | \mathbf{q}_1 \rangle \langle \mathbf{q}_1 | e^{-i\hat{H}\epsilon} | \mathbf{q}_0 \rangle; \quad (1.3)$$

concentriamoci sul generico di questi fattori e notiamo che per $\epsilon \rightarrow 0$ l'esponenziale è approssimabile con $1 - i\hat{H}\epsilon$ (commettendo un errore del secondo ordine in ϵ). La hamiltoniana contiene funzioni delle coordinate, funzioni degli impulsi e funzioni di coordinate ed impulsi moltiplicati tra di loro, quindi

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_k | \hat{H}(\hat{\mathbf{q}}) | \mathbf{q}_{k-1} \rangle &= H(\mathbf{q}_{k-1}) \delta(\mathbf{q}_{k-1} - \mathbf{q}_k) = H\left(\frac{\mathbf{q}_k + \mathbf{q}_{k-1}}{2}\right) \int \frac{d\mathbf{p}_{k-1}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{p}_{k-1} \cdot (\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k-1})}; \\ \langle \mathbf{q}_k | \hat{H}(\hat{\mathbf{p}}) | \mathbf{q}_{k-1} \rangle &= \int d\mathbf{p}_k \int d\mathbf{p}_{k-1} \langle \mathbf{q}_k | \mathbf{p}_k \rangle \langle \mathbf{p}_k | \hat{H}(\mathbf{p}) | \mathbf{p}_{k-1} \rangle \langle \mathbf{p}_{k-1} | \mathbf{q}_{k-1} \rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{p}_k \int d\mathbf{p}_{k-1} e^{i\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{q}_k} H(\mathbf{p}_{k-1}) \delta(\mathbf{p}_{k-1} - \mathbf{p}_k) e^{-i\mathbf{p}_{k-1} \cdot \mathbf{q}_{k-1}} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{p}_{k-1} e^{i\mathbf{p}_{k-1} \cdot \mathbf{q}_k} H(\mathbf{p}_{k-1}) e^{-i\mathbf{p}_{k-1} \cdot \mathbf{q}_{k-1}} = \\ &= \int \frac{d\mathbf{p}_{k-1}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{p}_{k-1} \cdot (\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k-1})} H(\mathbf{p}_{k-1}). \end{aligned}$$

In generale quindi, data una hamiltoniana che contiene solo funzioni delle coordinate e degli impulsi senza contenere però prodotti tra queste grandezze, si avrà

$$\langle \mathbf{q}_k | \hat{H}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}) | \mathbf{q}_{k-1} \rangle = \int \frac{d\mathbf{p}_{k-1}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{p}_{k-1} \cdot (\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k-1})} H\left(\mathbf{p}_{k-1}, \frac{\mathbf{q}_k + \mathbf{q}_{k-1}}{2}\right); \quad (1.4)$$

nel caso in cui la hamiltoniana sia funzione anche di prodotti delle coordinate e degli impulsi le cose si complicano non poco dato che questi operatori non commutano. Sorge quindi un'ambiguità dato che nel primo membro della (1.4) l'ordine di apparizione conterebbe mentre nel secondo membro no (a sinistra compaiono come operatori mentre a destra la hamiltoniana è calcolata sugli autovalori corrispondenti, e quindi c-neri). Questo problema è legato al fatto che una sola hamiltoniana classica può corrispondere a più operatori hamiltoniani quantistici; il problema è risolto dall'ordinamento alla Weyl, che è sostanzialmente una via per decidere quale operatore hamiltoniano quantistico usare. Per selezionare un unico operatore hamiltoniano da una teoria classica, Weyl propose di ordinare gli operatori fondamentali $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{p}}$ in tutti i modi possibili, facendone poi la media; questo produce un ordinamento univoco. Spesso si ha a che fare con operatori quantistici già fissati da altre considerazioni, e ci si pone il problema di scriverli nella forma ordinata secondo Weyl. Questo, come vedremo, permette di derivare e definire in modo univoco l'integrale sui cammini con una discretizzazione opportuna. Si riscrive l'operatore funzione delle coordinate e degli impulsi come

$$\hat{\mathbf{O}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}) = \hat{\mathbf{O}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}})_S + \text{"altri termini"}; \quad (1.5)$$

in cui $\hat{\mathbf{O}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}})_S$ è il termine in cui gli operatori delle coordinate e degli impulsi compaiono in maniera simmetrica. Per ottenere l'operatore simmetrizzato si sfrutta la seguente

$$\prod_{ij} (\hat{\mathbf{p}}_i^{m_i} \hat{\mathbf{x}}_j^{n_j})_S = \frac{1}{N!} \prod_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \right)^{m_i} \left(\frac{\partial}{\partial \beta_j} \right)^{n_j} (\alpha_i \hat{\mathbf{p}}_i + \beta_j \hat{\mathbf{x}}_j)^N,$$

in cui $\sum_i m_i + \sum_j n_j = N$. Per ottenere gli "altri termini" semplicemente si sottrae l'operatore simmetrizzato a quello originale.

Torniamo alla formula (1.4), ed immaginiamo che la hamiltoniana sia ordinata nel senso di Weyl allora la (1.4) è corretta e l'ampiezza di transizione (1.3) sarà il prodotto di elementi come in (1.4); tenendo conto del fatto che abbiamo espanso l'esponenziale abbiamo

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_k | 1 - i\epsilon \hat{H}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}) | \mathbf{q}_{k-1} \rangle &= \delta(\mathbf{q}_{k-1} - \mathbf{q}_k) - i\epsilon \int \frac{d\mathbf{p}_{k-1}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{p}_{k-1} \cdot (\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k-1})} H\left(\mathbf{p}_{k-1}, \frac{\mathbf{q}_k + \mathbf{q}_{k-1}}{2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle \mathbf{q}_k | e^{-i\epsilon \hat{H}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}})} | \mathbf{q}_{k-1} \rangle &= \int \frac{d\mathbf{p}_{k-1}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{p}_{k-1} \cdot (\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k-1})} e^{-i\epsilon H\left(\mathbf{p}_{k-1}, \frac{\mathbf{q}_k + \mathbf{q}_{k-1}}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Per ottenere l'ampiezza iniziale dobbiamo moltiplicare N di questi fattori integrando nella coordinata \mathbf{q}_k di mezzo (per "marginalizzarne" il contributo). Otteniamo

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_N | (e^{-i\epsilon \hat{H}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}})})^N | \mathbf{q}_0 \rangle &= \\ = \langle \mathbf{q}_N | (e^{-i\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}})^T}) | \mathbf{q}_0 \rangle &= \prod_k \int d\mathbf{q}_{k-1} \int \frac{d\mathbf{p}_{k-1}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{p}_{k-1} \cdot (\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k-1})} e^{-i\epsilon H\left(\mathbf{p}_{k-1}, \frac{\mathbf{q}_k + \mathbf{q}_{k-1}}{2}\right)} = \\ = \left(\prod_k \int d\mathbf{q}_{k-1} \int \frac{d\mathbf{p}_{k-1}}{(2\pi)^d} \right) & e^{i \sum_k (\mathbf{p}_{k-1} \cdot (\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k-1}) - \epsilon H\left(\mathbf{p}_{k-1}, \frac{\mathbf{q}_k + \mathbf{q}_{k-1}}{2}\right))}; \end{aligned} \quad (1.6)$$

ricordando che la costante di Plank è stata posta uguale ad 1, riconosciamo nella misura di integrazione la misura di integrazione dello spazio delle fasi. k va da 0 a $N-1$ per gli impulsi mentre da 1 ad $N-1$ per le coordinate (perchè le coordinate sono integrate solo tra gli stati intermedi). La (1.6) è la versione discretizzata della seguente

$$\langle \mathbf{q}_N | (e^{-i\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}})^T}) | \mathbf{q}_0 \rangle = \int D\mathbf{q}(t) D\mathbf{p}(t) e^{i \int_0^T \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dt}, \quad (1.7)$$

questa è la forma più generica, valida per ogni sistema quantistico, dell'integrale sui cammini.

Vediamo nello specifico il caso in cui la hamiltoniana sia della forma $\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{\mathbf{q}})$ allora, con riferimento alla (1.6) ed utilizzando la nota formula degli integrali gaussiani $\int a e^{-bx^2 + cx + d} = a \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{\left(\frac{c^2}{4b}\right) + d}$ (valida anche per integrali complessi), abbiamo

$$\langle \mathbf{q}_N | (e^{-i\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}})^T}) | \mathbf{q}_0 \rangle = \left(\prod_k \int d\mathbf{q}_{k-1} \int \frac{d\mathbf{p}_{k-1}}{(2\pi)^d} \right) e^{i \sum_k (\mathbf{p}_{k-1} \cdot (\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k-1}) - \epsilon \left(\frac{\mathbf{p}_{k-1}^2}{2m} + V(\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k-1}) \right))}.$$

Concentriamoci sul singolo integrale k -esimo

$$\int \frac{d\mathbf{p}_{k-1}}{(2\pi)^d} e^{i (\mathbf{p}_{k-1} \cdot (\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k-1}) - \epsilon \left(\frac{\mathbf{p}_{k-1}^2}{2m} \right))} = \frac{1}{(2\pi)^d} \left(\frac{2m\pi}{i\epsilon} \right)^{\frac{d}{2}} e^{\frac{i(\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k-1})^2 m}{2\epsilon}} = \left(\frac{m}{2i\epsilon\pi} \right)^{\frac{d}{2}} e^{\frac{im}{2\epsilon} (\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k-1})^2}$$

per cui, ricordando che gli integrali sugli impulsi sono uno in più rispetto a quelli sulle coordinate e che abbiamo N ampiezze del tipo sopra, otteniamo

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_N | (e^{-i\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}})^T}) | \mathbf{q}_0 \rangle &= \left(\frac{m}{2i\epsilon\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \left(\prod_{k=1}^{N-1} \int \left(\frac{m}{2i\epsilon\pi} \right)^{\frac{d}{2}} d\mathbf{q}_{k-1} \right) e^{i \sum_k \left(\frac{m}{2} \frac{(\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k-1})^2}{\epsilon^2} - V(\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k-1}) \right) \epsilon} \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle \mathbf{q}_N | (e^{-i\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}})^T}) | \mathbf{q}_0 \rangle &= \int D[\mathbf{q}(t)] e^{i \int dt L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} = \int D[\mathbf{q}(t)] e^{iS[\mathbf{q}(t)]}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

in cui l'integrazione è fatta su tutte le traiettorie tali che $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$ e $\mathbf{q}(t_0 + T) = \mathbf{q}_N$. Nella teoria dei campi quantistici la forma (8) è di gran lunga più comoda mettendo in luce migliore le proprietà di simmetria contenute nella teoria e legate alla lagrangiana.

1.1.1 Analogia con la meccanica statistica e azione euclidea

Nella prima riga della (1.8) abbiamo la forma discretizzata dell'integrale sui cammini a meno di termini del secondo ordine in ϵ , questa può essere usata per calcoli espliciti al computer; tuttavia è possibile approssimare l'operatore $e^{-(i\hat{H}\epsilon)^N} = e^{-(i(\hat{K} + \hat{V})\epsilon)^N}$ in modo diverso scrivendo

$$e^{-(i\hat{H}\epsilon)^N} \approx \left(e^{-i\epsilon\frac{\hat{V}}{2}} e^{-i\epsilon\hat{K}} e^{-i\epsilon\frac{\hat{V}}{2}} \right)^N,$$

commettendo un errore $O(\epsilon^3)$. Infatti sviluppiamo formalmente gli esponenziali fino al secondo ordine si ha (tralasciando l'elevazione alla N che è irrilevante in questo conto) come primo membro:

$$\begin{aligned} 1 - (i\hat{H}\epsilon) + \frac{1}{2}(-i\hat{H}\epsilon)^2 &= 1 - (i(\hat{K} + \hat{V})\epsilon) + \frac{1}{2}(-i(\hat{K} + \hat{V})\epsilon)^2 = \\ &= 1 - i\hat{K}\epsilon - i\hat{V}\epsilon + \frac{1}{2}(-i\epsilon)^2(\hat{K}^2 + \hat{V}^2 + \hat{K}\hat{V} + \hat{V}\hat{K}), \end{aligned}$$

mentre il secondo membro è dato da (sempre al secondo ordine)

$$\begin{aligned} &= \left(1 - \left(i\frac{\hat{V}}{2}\epsilon \right) + \frac{1}{2} \left(-i\frac{\hat{V}}{2}\epsilon \right)^2 \right) \left(1 - \left(i\hat{K}\epsilon \right) + \frac{1}{2} \left(-i\hat{K}\epsilon \right)^2 \right) \left(1 - \left(i\frac{\hat{V}}{2}\epsilon \right) + \frac{1}{2} \left(-i\frac{\hat{V}}{2}\epsilon \right)^2 \right) = \\ &= 1 - \left(i\frac{\hat{V}}{2}\epsilon \right) + \frac{1}{2} \left(-i\frac{\hat{V}}{2}\epsilon \right)^2 - \left(i\hat{K}\epsilon \right) + (i\epsilon)^2 \left(\hat{K}\frac{\hat{V}}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(-i\hat{K}\epsilon \right)^2 + \\ &- \left(i\frac{\hat{V}}{2}\epsilon \right) + \left(i\frac{\hat{V}}{2}\epsilon \right)^2 + (i\epsilon)^2 \left(\frac{\hat{V}}{2}\hat{K} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(-i\frac{\hat{V}}{2}\epsilon \right)^2 = \\ &= 1 - i\hat{V}\epsilon - i\hat{K}\epsilon + \frac{1}{2}(-i\epsilon)^2(\hat{K}^2 + \hat{K}\hat{V} + \hat{V}\hat{K} + \hat{V}^2); \end{aligned}$$

Come si vede i due sviluppi sono uguali e quindi l'errore commesso è sicuramente almeno del terzo ordine in ϵ . Questa diversa discretizzazione consente calcoli numerici per le teorie su reticolo con una maggiore convergenza. Ripercorrendo gli stessi conti della sezione precedente si arriva, nonostante la diversa discretizzazione, alla stessa quantità che definisce l'integrale funzionale.

Chiediamoci ora quale sia la convergenza dell'integrale (1.8): tenendo conto solo di tempi reali l'integrale non è ben definito e non è possibile capirne la convergenza; è necessario, pertanto, ammettere una parte immaginaria nella nostra variabile temporale, $t = \tau(1 - i\xi)$, in cui ξ è una piccola costante positiva. Si ha

$$\int D[\mathbf{q}(t)] e^{i\int dt L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} := \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \int D[\mathbf{q}(\tau)] e^{i\int d\tau(1-i\xi)L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \int D[\mathbf{q}(\tau)] e^{i\int d\tau L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} e^{\int d\tau \xi L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}; \quad (1.9)$$

la convergenza o meno dipende dalla forma esplicita della lagrangiana, ad esempio se $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{m\dot{\mathbf{q}}^2}{2} - V(\mathbf{q})$ allora $\dot{\mathbf{q}}^2 = \frac{d\mathbf{q}}{dt} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{1}{(1-i\xi)} \frac{1}{(1-i\xi)} \frac{d\mathbf{q}}{d\tau} \frac{d\mathbf{q}}{d\tau} \approx (1 + i\xi)^2 \left(\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} \right)^2 \approx (1 + 2i\xi) \left(\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} \right)^2$ e sostituendo nell'integrale

all'esponente nella (9) otteniamo

$$\begin{aligned}
i \int d\tau (1 - i\xi) L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= i \int d\tau (1 - i\xi) \left[\frac{m}{2} (1 + 2i\xi) \left(\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} \right)^2 - V(\mathbf{q}) \right] = \\
&= i \int d\tau \left[\frac{m}{2} (1 + 2i\xi) \left(\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} \right)^2 - V(\mathbf{q}) \right] + i \int d\tau (-i\xi) \left[\frac{m}{2} (1 + 2i\xi) \left(\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} \right)^2 - V(\mathbf{q}) \right] \approx \\
&\approx i \int d\tau \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} \right)^2 - V(\mathbf{q}) \right] - \int d\tau \left[\frac{m}{2} 2\xi \left(\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} \right)^2 \right] + \int d\tau \left[\frac{m}{2} \xi \left(\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} \right)^2 - V(\mathbf{q}) \right] = \\
&= i \int d\tau \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} \right)^2 - V(\mathbf{q}) \right] - \int d\tau \left[\frac{m}{2} \xi \left(\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} \right)^2 + V(\mathbf{q}) \right];
\end{aligned}$$

sostituendo nella (9) abbiamo

$$\int D[\mathbf{q}(t)] e^{i \int dt L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \int D[\mathbf{q}(t)] e^{i \int d\tau \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} \right)^2 - V(\mathbf{q}) \right] - \xi \int d\tau \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} \right)^2 + V(\mathbf{q}) \right]}. \quad (1.10)$$

La (1.10) mostra una parte contenente un esponenziale che potrebbe comportare la convergenza del nostro integrale; i casi di convergenza si hanno sicuramente quando il potenziale è nullo o quando è limitato inferiormente. Se il potenziale è non limitato inferiormente allora bisogna valutare caso per caso. ad esempio $V(q) = -q^n$ allora si ha convergenza solo per $-1 \leq n \leq 0$.

Nel caso, curioso, in cui prendiamo tempi immaginari puri, $t = -i\tau$, la derivata temporale delle coordinate cambia segno e $dt = -id\tau$ per cui

$$\begin{aligned}
\int D[\mathbf{q}(t)] e^{iS[\mathbf{q}(t)]} &= \int D[\mathbf{q}(t)] e^{i \int dt \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt} \right)^2 - V(\mathbf{q}) \right]} = \\
&= \int D[\mathbf{q}(t)] e^{i \int -id\tau \left[-\frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} \right)^2 - V(\mathbf{q}) \right]} = \int D[\mathbf{q}(t)] e^{-S_E[\mathbf{q}(t)]},
\end{aligned}$$

in cui $S_E = \int d\tau \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{q}}{d\tau} \right)^2 + V(\mathbf{q}) \right]$ è l'azione euclidea (in sostanza è l'integrale della hamiltoniana). E' interessante notare che

$$\begin{aligned}
\int D[\mathbf{q}(\tau)] e^{-S_E[\mathbf{q}(\tau)]} &= \int D[\mathbf{q}(\tau)] e^{-\int_0^\beta H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) d\tau} = \int d\mathbf{q} \langle \mathbf{q} | e^{-\beta \hat{H}} | \mathbf{q} \rangle = \text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}}) = \\
&= \sum_n \langle E_n | e^{-\beta \hat{H}} | E_n \rangle = \sum_n e^{-\beta E_n};
\end{aligned} \quad (1.11)$$

in cui nel primo passaggio abbiamo sviluppato l'integrale funzionale tra i tempi $t_i = 0$ e $t_f = -i\beta$, nel secondo passaggio abbiamo usato la definizione di integrale funzionale, nel terzo passaggio l'abbiamo espresso come traccia sull'operatore posizione, nel quarto passaggio (ricordando che la traccia di un operatore è indipendente dal set di autostati su cui è calcolata) abbiamo espresso la traccia sugli autostati della hamiltoniana ed infine fatto agire l'operatore sui suoi autostati ottenendo la funzione di partizione. Il formalismo di Feynman mette in luce che la meccanica statistica altro non è che la meccanica quantistica a tempi immaginari. L'integrazione funzionale del secondo passaggio deve essere fatta su tutti i cammini ciclici che partono da un arbitrario punto \mathbf{q} a $t_i = 0$ e vi tornano al tempo $t_f = -i\beta$.

1.1.2 Funzioni di Green e funzionale generatore

Come sappiamo, la funzione di Green a N punti è definita come il valore di aspettazione sul vuoto del prodotto tempo ordinato di N operatori

$$G_N(t_1, \dots, t_N) = \langle 0 | \mathcal{T}[\hat{\mathbf{q}}(t_1) \dots \hat{\mathbf{q}}(t_N)] | 0 \rangle; \quad (1.12)$$

immaginiamo di avere $t_1 > t_2 > \dots > t_{N-1} > t_N$ e sviluppiamo il \mathcal{T} prodotto

$$G_N(t_1, \dots, t_N) = \langle 0 | \hat{\mathbf{q}}(t_1) \dots \hat{\mathbf{q}}(t_N) | 0 \rangle .$$

Esplicitiamo la dipendenza temporale degli operatori, inoltre, sommiamo e dividiamo per la quantità $e^{-2iT E_0}$,

$$\begin{aligned} G_N(t_1, \dots, t_N) &= \frac{e^{-2iT E_0}}{e^{-2iT E_0}} \langle 0 | e^{it_1 \hat{H}} \hat{\mathbf{q}} e^{-i(t_1-t_2) \hat{H}} \dots e^{-i(t_{N-1}-t_N) \hat{H}} \hat{\mathbf{q}} e^{-it_N \hat{H}} | 0 \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow G_N(t_1, \dots, t_N) &= \frac{\langle 0 | e^{-i(T-t_1) \hat{H}} \hat{\mathbf{q}} e^{-i(t_1-t_2) \hat{H}} \dots e^{-i(t_{N-1}-t_N) \hat{H}} \hat{\mathbf{q}} e^{-i(t_N+T) \hat{H}} | 0 \rangle}{\langle 0 | e^{-2iT \hat{H}} | 0 \rangle} . \end{aligned}$$

A questo punto introduciamo una piccola parte immaginaria al tempo, $T' = (1 - i\xi)T$ e $t' = (1 - i\xi)t$

$$G_N(t_1, \dots, t_N) = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle 0 | e^{-i(T'-t'_1) \hat{H}} \hat{\mathbf{q}} e^{-i(t'_1-t'_2) \hat{H}} \dots e^{-i(t'_{N-1}-t'_N) \hat{H}} \hat{\mathbf{q}} e^{-i(t'_N+T') \hat{H}} | 0 \rangle}{\langle 0 | e^{-2iT' \hat{H}} | 0 \rangle} ;$$

il limite del tempo T all'infinito sembra inutile ma in realtà ci permette di passare dalla valutazione sul vuoto alla valutazione su di un intero set di autostati. Grazie all'inserimento della piccola (ma positiva) parte immaginaria, ξ , i contributi sugli stati diversi dal vuoto vengono depressi esponenzialmente:

$$G_N(t_1, \dots, t_N) = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_n \langle n | e^{-i(T'-t'_1) \hat{H}} \hat{\mathbf{q}} e^{-i(t'_1-t'_2) \hat{H}} \dots e^{-i(t'_{N-1}-t'_N) \hat{H}} \hat{\mathbf{q}} e^{-i(t'_N+T') \hat{H}} | n \rangle}{\sum_n \langle n | e^{-2iT' \hat{H}} | n \rangle} ;$$

la cancellazione esponenziale è dovuta, oltre che alla parte immaginaria inserita, anche al fatto che $E_n > E_0$. La traccia è del tutto indipendente dalla scelta della base quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} G_N(t_1, \dots, t_N) &= \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int \tilde{\mathbf{q}} \langle \tilde{\mathbf{q}} | e^{-i(T'-t'_1) \hat{H}} \hat{\mathbf{q}} e^{-i(t'_1-t'_2) \hat{H}} \dots e^{-i(t'_{N-1}-t'_N) \hat{H}} \hat{\mathbf{q}} e^{-i(t'_N+T') \hat{H}} | \tilde{\mathbf{q}} \rangle}{\int \tilde{\mathbf{q}} \langle \tilde{\mathbf{q}} | e^{-2iT' \hat{H}} | \tilde{\mathbf{q}} \rangle} \Rightarrow \\ \Rightarrow G_N(t_1, \dots, t_N) &= \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int D[\mathbf{q}](t') \mathbf{q}(t'_1) \dots \mathbf{q}(t'_N) e^{iS[\mathbf{q}(t')]} }{\int D[\mathbf{q}](t') e^{iS[\mathbf{q}(t')]} } = \frac{\int D[\mathbf{q}](t) \mathbf{q}(t_1) \dots \mathbf{q}(t_N) e^{iS[\mathbf{q}(t)]} }{\int D[\mathbf{q}](t) e^{iS[\mathbf{q}(t)]} } , \end{aligned} \quad (1.13)$$

Per cui i propagatori possono essere espressi come integrali su cammini ciclici: al numeratore abbiamo un integrale sui cammini ciclici che partono da un qualunque punto $\tilde{\mathbf{q}}$ al tempo $t = -T$ e vi tornano al tempo $t = T$ e che passano per i punti $\mathbf{q}(t_1)$ al tempo $t = t_1$, $\mathbf{q}(t_2)$ al tempo $t = t_2$, bla bla bla, $\mathbf{q}(t_N)$ al tempo $t = t_N$; al denominatore, invece, un integrale sui cammini che partono da un qualunque punto $\tilde{\mathbf{q}}$ al tempo $t = -T$ e vi tornano al tempo $t = T$.

La forma (13) ricorda molto la forma con cui in meccanica statistica si calcolano alcune quantità di interesse a partire dalla funzione di partizione del sistema. Vogliamo trovare una quantità simile che permetta di ricavare in maniera "semplice" i propagatori ad N punti; questa quantità prende il nome di funzionale generatore ed ha la seguente forma

$$Z[J_1(t), \dots, J_N(t)] = Z[\mathbf{J}(t)] = \int D[\mathbf{q}(t)] e^{iS[\mathbf{q}(t)] - i \int dt \mathbf{q}(t) \cdot \mathbf{J}(t)} . \quad (1.14)$$

Per poter ritrovare la (1.13) partendo dalla (1.14) dobbiamo definire il concetto di derivata funzionale (la generalizzazione a spazi di funzioni dell'ordinaria derivata), ossia (in n dimensioni)

$$\frac{\delta J(x)}{\delta J(y)} = \delta^{(n)}(x - y) ; \quad \frac{\delta}{\delta J(y)} \int d^n y J(x) f(x) = f(y) ,$$

inoltre valgono le ordinarie regole di derivazione. Definiamo la funzione di Green ad N punti come

$$G_N(t_1, \dots, t_N) = \frac{(i)^N}{Z[\mathbf{0}]} \left[\frac{\delta}{\delta J_1(t_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J_N(t_N)} Z[\mathbf{J}(t)] \right] \Bigg|_{\mathbf{J}=\mathbf{0}}, \quad (1.15)$$

infatti

$$\begin{aligned} G_N(t_1, \dots, t_N) &= \frac{-i(i)^N}{\int D[\mathbf{q}](t) e^{iS[\mathbf{q}(t)]}} \left[\frac{\delta}{\delta J_1(t_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J_{N-1}(t_{N-1})} \int D[\mathbf{q}(t)] \mathbf{q}(t_N) e^{iS[\mathbf{q}(t)] - i \int dt \mathbf{q}(t) \cdot \mathbf{J}(t)} \right] \Bigg|_{\mathbf{J}=\mathbf{0}} = \\ &= \frac{\int D[\mathbf{q}](t) \mathbf{q}(t_1) \dots \mathbf{q}(t_N) e^{iS[\mathbf{q}(t)]}}{\int D[\mathbf{q}](t) e^{iS[\mathbf{q}(t)]}}. \end{aligned}$$

1.2 Il paths integral in QFT

Nella prima sezione abbiamo definito importanti concetti riguardo l'integrale sui cammini; in questa sezione estenderemo questi concetti, almeno formalmente, al caso di infiniti gradi di libertà e quindi alle teorie di campo. Nelle teorie di campo quantistico abbiamo a che fare con campi definiti in ogni punto dello spazio tempo; l'idea, pertanto, è di discretizzare lo spazio tempo come fosse un reticolo di lato L e passo reticolare a sul quale il campo assume la sua continuità di valori; per riottenere la teoria di campo originale ci basterà fare il limite per cui il lato del reticolo tende all'infinito ed il passo reticolare a zero. In definitiva, consideriamo la definizione (1.8) per gli integrali sui cammini ricordando che questa è ottenuta prendendo i limiti sopra descritti; con questa scelta tutto quello che abbiamo detto sulle funzioni di Green e sul funzionale generatore continuerà a valere anche per una teoria ad infiniti gradi di libertà. E' importante sottolineare che si devono utilizzare le condizioni periodiche al bordo (sia spaziali che temporali) del reticolo per poter eseguire integrazione per parti e poter porre a zero i termini di superficie.

1.2.1 Funzioni di Green e funzionale generatore per teorie di campo

Nella teoria dei campi abbiamo una più ricca varietà di casistiche: campi scalari reali, campi scalari complessi, campi spinoriali, campi vettoriali, etc etc; ognuno di questi ha una definizione specifica di funzionale generatore $Z[\mathbf{J}]$ ma sempre della forma (1.14). Possiamo scrivere in maniera molto compatta, anche alla luce della (1.13), la generica funzione di correlazione a N punti (ricordiamo che essa è definita come il valore di aspettazione sul vuoto del prodotto tempo ordinato di N operatori di campo)

$$\begin{aligned} G_k(x_1, \dots, x_N) &= \langle 0 | \mathcal{T}[\phi_{(a_1, b_1)}(x_1), \dots, \phi_{(a_n, b_n)}^\dagger(x_N)] | 0 \rangle = \\ &= \frac{\int D[\phi_{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)}(x)] \phi_{(a_1, b_1)}(x_1), \dots, \phi_{(a_n, b_n)}^\dagger(x_N) e^{iS[\phi_{(a_1, b_1)}(x), \dots, \phi_{(a_n, b_n)}^\dagger(x)]}}{\int D[\phi_{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)}(x)] e^{iS[\phi_{(a_1, b_1)}(x), \dots, \phi_{(a_n, b_n)}^\dagger(x)]}} = \\ &= \frac{(i)^N}{Z[\mathbf{0}]} \left[\frac{\delta}{\delta J_1^\dagger(x_1)} \cdots \frac{-\delta}{\delta J_N(x_N)} Z[\mathbf{J}] \right] \Bigg|_{\mathbf{J}=\mathbf{0}}; \end{aligned} \quad (1.16)$$

in cui \mathbf{J} è il "vettore" delle sorgenti, il numero di componenti è pari al numero di campi che si sta considerando (il numero di campi diversi che compaiono nella densità di lagrangiana). I pedici (a_i, b_i) indicano la rappresentazione del gruppo di Lorentz, scritta come prodotto tensoriale di due gruppi $SU(2)$, a cui appartiene il campo in esame; la misura $D[\phi_{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)}(x)]$ indica il prodotto delle misure di integrazione per i campi nelle diverse rappresentazioni e $S[\phi_{(a_1, b_1)}(x), \dots, \phi_{(a_n, b_n)}^\dagger(x)]$ sta ad indicare che l'azione contiene campi appartenenti a diverse rappresentazioni. La (16) può essere ottenuta sistematicamente grazie alla

sostituzione $\phi_{(a,b)}(x_k) \rightarrow \frac{i\delta}{\delta J_k^\dagger(x_k)}$ e $\phi_{(a,b)}^\dagger(x_k) \rightarrow -\frac{i\delta}{\delta J_k(x_k)}$; in generale, dato un funzionale dei campi, potremo scrivere

$$\begin{aligned} & \int d[\phi_{(a_1,b_1),\dots,(a_n,b_n)}(x)] F[\phi_{(a_1,b_1)}(x), \dots, \phi_{(a_n,b_n)}^\dagger(x)] e^{iS[\phi_{(a_1,b_1)}(x), \dots, \phi_{(a_n,b_n)}^\dagger(x)]} = \\ & = F\left[\frac{\delta}{\delta J_1^\dagger}, \dots, -\frac{\delta}{\delta J_n}\right] Z[\mathbf{J}] \Big|_{\mathbf{J}=0} \end{aligned}$$

Sempre dalla (1.16) notiamo due importanti caratteristiche della funzione di Green; essendo la misura di integrazione invariante per traslazioni lo sono anche le funzioni di Green che quindi dipendono solo da $N-1$ variabili; questo comporta anche che la trasformata di Fourier dei propagatori con N punti può essere scritta come prodotto tra una delta di Dirac (che rappresenta la conservazione del momento) e la trasformata di Fourier del propagatore dipendente da $N-1$ variabili. Quest'ultima proprietà si vede moltiplicando e dividendo per $e^{ip_i x_i}$ e sfruttando l'integrale in x_i per costruire una delta; successivamente, data l'invarianza per traslazioni, si potrà scrivere $\phi(x_1, \dots, x_N) = G_k(x_1, \dots, x_{i-1} - x_i, \dots, x_N)$ ed integrando nelle restanti variabili si ottiene il risultato cercato. Va sottolineato che le due formule appena date vanno prese come la forma generica ma che questa deve essere leggermente modificata nel caso di campi fermionici e che campi scalari reale (essendo anche le sorgenti J_k reali) la sostituzione da fare è $\phi_{(a,b)}(x_k) \rightarrow \frac{i\delta}{\delta J_k(x_k)}$.

Vediamo un esempio di applicazione: consideriamo il campo scalare libero, $\phi_{0,0}(x) := \phi(x)$, la cui densità di lagrangiana ha la forma $\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^2(x)]$. Prima di tutto riscriviamo l'azione di modo da avere una quantità in cui si possa definire un operatore differenziale che chiameremo operatore di Klein-Gordon:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int d^4x \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^2(x) = \frac{1}{2} \int d^4x \partial_\mu [\phi(x) \partial^\mu \phi(x)] - m^2 \phi^2(x) - \phi(x) \partial_\mu \partial^\mu \phi(x) = \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) \partial_\mu \partial^\mu \phi(x) + m^2 \phi^2(x) = -\frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) \hat{K} \phi(x), \end{aligned}$$

in cui $\hat{K} := \partial_\mu \partial^\mu + m^2 = \square + m^2$ è l'operatore di Klein-Gordon cercato. A questo punto costruiamo il funzionale generatore che nel caso del campo scalare libero è dato da

$$Z[J] = \int D[\phi(x)] e^{iS[\phi(x)] - i \int d^4x J(x) \phi(x)} = \int D[\phi(x)] e^{-\frac{i}{2} \int d^4x [\phi(x) \hat{K} \phi(x) + 2J(x) \phi(x)]}$$

sommiamo e sottraiamo all'esponente la quantità $-\frac{i}{2} \int d^4x \hat{K}^{-1}(J(x)) \hat{K}(\hat{K}^{-1}J(x))$ e notiamo che, tramite integrazione per parti due volte (l'operatore \hat{K} è differenziale),

$$\int d^4x J(x) \phi(x) = \int d^4x \hat{K}(\hat{K}^{-1}(J(x))) \phi(x) = \int d^4x \hat{K}^{-1}(J(x)) \hat{K}(\phi(x));$$

il funzionale generatore diventa

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int D[\phi(x)] e^{-\frac{i}{2} \int [d^4x \phi(x) \hat{K} \phi(x) + \phi(x) J(x) + J(x) \phi(x)]} = \\ &= \int D[\phi(x)] e^{-\frac{i}{2} \int [d^4x \phi(x) \hat{K} \phi(x) + \phi(x) J(x) + \hat{K}^{-1}(J(x)) \hat{K}(\phi(x)) + \hat{K}^{-1}(J(x)) \hat{K}(\hat{K}^{-1}J(x)) - \hat{K}^{-1}(J(x)) \hat{K}(\hat{K}^{-1}J(x))] } = \\ &= \int D[\phi(x)] e^{-\frac{i}{2} \int [d^4x (\phi(x) + \hat{K}^{-1}(J(x))) \hat{K}((\phi(x) + \hat{K}^{-1}(J(x)))) - \hat{K}^{-1}(J(x)) \hat{K}(\hat{K}^{-1}J(x))] } = \\ &= e^{\frac{i}{2} \int [d^4x \hat{K}^{-1}(J(x)) \hat{K}(\hat{K}^{-1}J(x))]} \int D[\phi(x)] e^{-\frac{i}{2} \int [d^4x (\phi(x) + \hat{K}^{-1}(J(x))) \hat{K}((\phi(x) + \hat{K}^{-1}(J(x))))]}. \end{aligned}$$

L'intergale funzionale è in realtà una costante, c , dato che con un semplice cambio di variabili, $\phi'(x) = \phi(x) + \hat{K}^{-1}(J(x))$ non dipende più dalla sorgente $J(x)$ (ricordiamo che la misura d'integrazione funzionale è invariante per traslazioni). Il funzionale generatore assume la forma

$$Z[J] = c e^{\frac{i}{2} \iint [d^4x \hat{K}^{-1}(J(x)) \hat{K}(\hat{K}^{-1}J(x))]} = c e^{\frac{i}{2} \iint [d^4x \hat{K} \hat{K}^{-1}(J(x)) (\hat{K}^{-1}J(x))]} = c e^{\frac{i}{2} \iint [d^4x J(x) (\hat{K}^{-1}J(x))]},$$

l'operatore \hat{K}^{-1} è un operatore integrale tale che il suo nucleo, $ker(\hat{K}^{-1})(x)$, sia la funzione di Green dell'operatore \hat{K} , ossia

$$\hat{K} ker(\hat{K}^{-1})(x) = \delta^{(4)}(x) \Rightarrow \hat{K}^{-1}J(x) = \int d^4y ker(\hat{K}^{-1})(x-y)J(y).$$

Utilizzeremo questa equazione per determinare la funzione di Green; dobbiamo però ricordarci che il funzionale generatore è definito come limite tendente a zero di un tempo $t' = (1 - i\xi)t$ contenente una piccola parte immaginaria positiva, per cui l'operatore di Klein-Gordon è $\hat{K} = -\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^2 + (\vec{\nabla})^2 + m^2 = -(1 + 2i\xi)\partial_t^2 + (\vec{\nabla})^2 + m^2$ e l'equazione che definisce la funzione di Green appare come

$$\begin{aligned} (-(1 + 2i\xi)\partial_t^2 + (\vec{\nabla})^2 + m^2)ker(\hat{K}^{-1})(x) &= -\delta^{(4)}(x) \Rightarrow ((1 + 2i\xi)E^2 - \mathbf{p}^2 + m^2)ker(\hat{K}^{-1})(p) = -1 \Rightarrow \\ \Rightarrow ker(\hat{K}^{-1})(p) &= \frac{-1}{(1 + 2i\xi)E^2 - \mathbf{p}^2 + m^2} = \frac{1}{\mathbf{p}^2 - E^2 - m^2 + i\epsilon}, \end{aligned} \tag{1.17}$$

in cui siamo passati alla trasformata di Fourier, per cui si avrà

$$ker(\hat{K}^{-1})(x) = \mathcal{F}^{-1}(ker(\hat{K}^{-1})(p)).$$

Il funzionale generatore si scrive, finalmente, come

$$Z[J] = c e^{\frac{i}{2} \iint [d^4x J(x) (\hat{K}^{-1}J(x))]} := c e^{\frac{i}{2} \iint [d^4x d^4y J(x) ker(\hat{K}^{-1})(x-y)J(y)]}. \tag{1.18}$$

Utilizzando la (1.16) possiamo ricavare la funzione di Green a due punti del campo scalare

$$\begin{aligned} G_1(x_1, x_2) &= \frac{1}{c} \left[\frac{i\delta}{\delta J(x_1)} \frac{i\delta}{\delta J(x_2)} c e^{\frac{i}{2} \iint [d^4x d^4y J(x) ker(\hat{K}^{-1})(x-y)J(y)]} \right] \Bigg|_{J=0} = \\ &= i^3 \frac{\delta}{\delta J(x_1)} e^{\frac{i}{2} \iint [d^4x d^4y J(x) ker(\hat{K}^{-1})(x-y)J(y)]} \int d^4y ker(\hat{K}^{-1})(x_2 - y)J(y) \Bigg|_{J=0} = \\ &= \left(e^{\frac{i}{2} \iint [d^4x d^4y J(x) ker(\hat{K}^{-1})(x-y)J(y)]} \right) \left(ker(\hat{K}^{-1})(x_2 - x_1) \right) \Bigg|_{J=0} = ker(\hat{K}^{-1})(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Nella prima derivazione non compare il fattore $\frac{1}{2}$ perchè potremmo derivare rispetto a $J(x)$ o $J(y)$ ma i due contributi restituirebbero la stessa quantità data la simmetria delle funzioni di Green ($G(x_1, x_2) = G(x_2, x_1)$); nella seconda derivazione non si è tenuto conto del termine derivante dall'esponenziale dato che si annullerebbe quando si pone $J = 0$. E' interessante notare che il formalismo degli integrali sui cammini mette in luce la relazione tra il termine cinetico (il termine di campo libero) della densità di lagrangiana e il propagatore del campo: nello spazio delle coordinate il propagatore è il nucleo dell'operatore inverso dell'operatore cinetico, mentre nello spazio dei momenti il propagatore è l'inverso algebrico dell'operatore cinetico.

1.2.2 Cenni al formalismo di Wightman e al formalismo di Schwinger

In questa sezione vedremo dei cenni alla formulazione assiomatica di una teoria di campo nello spazio di Minkowski e nello spazio euclideo per poter capire in che modo continuare analiticamente una teoria di campo relativistica ad una teoria di campo euclidea e poter definire la rotazione di Wick. Questa introduzione è necessaria perché l'integrale funzionale non è, come visto, ben definito nelle teorie di campo relativistiche; cerchiamo quindi una procedura per passare nello spazio euclideo in cui l'integrale sui cammini risulta ben definito, per poter svolgere i calcoli necessari e poi tornare nella corrispondente teoria di campo relativistica. La prima considerazione da fare è che se la componente temporale fosse immaginaria pura il prodotto scalare minkowskiano risulterebbe essere un prodotto scalare euclideo, infatti

$$x^\mu y_\mu = -x_0 y_0 + \sum_i x_i y_i \Rightarrow -(ix_4)(ix_4) + \sum_i x_i y_i = x_4 x_4 + \sum_i x_i y_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y},$$

in cui $\mathbf{x} = (x_4, x_1, x_2, x_3)$ e analogamente per \mathbf{y} .

Elenchiamo e commentiamo brevemente gli assiomi di Wightman per una teoria di campo relativistica:

Wightman 1 *Esiste uno spazio di Hilbert, \mathbf{H} , sul quale opera una rappresentazione unitaria, $\hat{U}(\Lambda, a)$, del gruppo di ricoprimento universale del gruppo di Poincaré, in cui $\Lambda \in SL(2, \mathbf{C})$ e $a \in \mathbf{M}$.*

Commento 1 *In sostanza richiede l'esistenza di uno spazio di Hilbert in cui operano le trasformazioni di Poincaré.*

Wightman 2 *Lo spettro dell'operatore energia-impulso, \hat{p} (il generatore delle traslazioni), si trova sulla chiusura del cono superiore, ossia nell'insieme $\bar{V}^+ \equiv \{p \in \mathbf{M} : p^2 \leq 0, p_0 \geq 0\}$*

Commento 2 *Lo spettro di un operatore è la generalizzazione dell'insieme di autovalori per operatori finito dimensionali; in sostanza lo spettro deve giacere interamente nel cono luce futuro.*

Wightman 3 *Esiste in \mathbf{H} un unico vettore, indicato con $|0\rangle$, invariante rispetto alle trasformazioni del gruppo di Poincaré.*

Commento 3 *Il vettore $|0\rangle$ è detto "stato di vuoto" ed è definito a meno di un fattore di fase. La richiesta dell'assioma 3 è equivalente al principio di cluster decomposition (PCD), ossia alla richiesta che esista nel dominio comune dei campi un vettore $|0\rangle$ tale che per ogni distanza di tipo spazio, $b \in \mathbf{M}$, e per ogni n-upla di operatori, A_1, \dots, A_n appartenenti all'algebra polinomiale, $\mathcal{P}(\mathbf{M})$, (l'algebra generata da tutte le possibili combinazioni lineari di prodotti di campi) si deve avere*

$$\langle 0 | A'_1 A'_2 \dots A'_i \dots A'_N | 0 \rangle \rightarrow \langle 0 | \prod_{\text{non traslati}} A'_i | 0 \rangle \langle 0 | \prod_{\text{traslati}} A'_i | 0 \rangle \text{ per } \lambda \rightarrow \infty$$

in cui $A'_i = A_i$ se l'operatore non è traslato mentre $A'_i = \hat{U}(\mathbf{1}, \lambda b) A_i \hat{U}^{-1}(\mathbf{1}, \lambda b)$ se l'operatore è traslato. Come si intuisce il PCD ha importanti conseguenze sulle funzioni di correlazione (in quanto contengono combinazioni lineari di prodotti di operatori di campo); infatti il PCD richiede che se uno degli argomenti della funzione di correlazione connessa è traslato di una quantità di tipo spazio allora il propagatore è soppresso (se è presente un mass gap $m > 0$ e l'argomento è traslato di una quantità b di tipo spazio allora la funzione di correlazione va a zero come $e^{-m|b|}$). Il PCD è legato alla causalità per cui regioni separate da distanze di tipo spazio devono avere comportamenti indipendenti (questo è vero a meno che lo stato di vuoto non sia miscela statistica: in quel caso la causalità viene meno, per via degli stati entangled, e il PCD non può essere richiesto).

Wightman 4 Viene definito campo quantistico relativistico, $\phi_{(a,b)}(x)$, l'operatore a valori distribuzionali sullo spazio di Schwartz (spazio delle funzioni a decrescenza rapida) con dominio di definizione, D , comune a tutti gli operatori e tale che sia denso nello spazio di Hilbert considerato.

Commento 4 L'assioma 4 introduce i campi come operatori che agiscono sullo spazio di Hilbert in esame e contemporaneamente sono funzionali lineari dello spazio di Schwarz. In altre parole data una funzione test, f , dello spazio di Schwarz, il campo valutato sulla funzione f è un operatore dello spazio di Hilbert. L'assioma non richiede che l'operatore di campo sia limitato, basta che esso sia definito su un insieme denso nello spazio di Hilbert. Ovviamente lo stato di vuoto deve essere contenuto nel dominio di definizione dell'operatore di campo.

Wightman 5 I campi trasformano sotto una certa rappresentazione, $\tilde{\Lambda}$, del gruppo di Poincaré

$$\hat{U}(\Lambda, b)\phi_{(a,b),i}(x)\hat{U}^{-1}(\Lambda, b) = \tilde{\Lambda}_{ij}\phi_{(a,b),i}(\Lambda x + a).$$

Commento 5 I pedici i e j stanno a significare le componenti dell'operatore di campo. Dato che le rappresentazioni del gruppo di Poincaré sono tutte finite dimensionalmente, i campi possono avere solo un numero finito di componenti.

Wightman 6 Due campi qualsiasi $\phi_{(a,b),i}(x)$, $\phi_{(a',b'),j}(y)$ o commutano o anticommutano quando x ed y sono separati da una distanza di tipo spazio all'interno dello spazio di Minkowski. I campi commutanti sono bosonici mentre quelli anticommutanti, fermionici.

Commento 6 Quest'assioma richiede la microcausalità (o causalità locale) e quindi il principio di causalità di Einstein. Per campi che sono osservabili, la regola è di commutazione (dal principio di indeterminazione, se sono commutanti non possono essere causalmente connessi); per quei campi che non sono osservabili la regola è di anticommutazione. L'ultima richiesta ci permette di ritrovare il teorema di spin-statistica.

A questo punto definiamo le funzioni di Wightman come

$$W_{(a_1,b_1),\dots,(a_n,b_n)}(x_1\dots x_N) = \langle 0|\phi_{(a_1,b_1)}(x_1), \dots, \phi_{(a_n,b_n)}(x_N)|0 \rangle; \quad (1.19)$$

il risultato fondamentale, detto teorema di ricostruzione, di questo formalismo è che date delle funzioni di Wightman (in realtà sono delle distribuzioni) che rispettano gli assiomi esposti, allora esiste un sistema di campi quantistici i cui valori di aspettazione sul vuoto (e quindi i propagatori) sono uguali al sistema di funzioni date. In altre parole l'intero contenuto di una teoria di campo quantistico relativistica può essere tradotta nel linguaggio delle funzioni di Wightman e queste permettono di ricostruire lo spazio di Hilbert, la rappresentazione del gruppo di Poincaré e gli operatori di campo stessi.

Definiamo, a questo punto, le funzioni di Schwinger, per farlo scriviamo tutti i campi che compaiono nella definizione della funzione di Wightman come $\phi_{(a_i,b_i)}(x) = e^{i\hat{p}x}\phi_{(a_i,b_i)}(0)e^{-i\hat{p}x}$ per cui (1.19) diventa

$$\begin{aligned} W_{(a_1,b_1),\dots,(a_n,b_n)}(x_1, \dots, x_N) &= \langle 0|e^{i\hat{p}x_1}\phi_{(a_1,b_1)}(0)e^{-i\hat{p}(x_1-x_2)}\dots e^{i\hat{p}(x_{N-1}-x_N)}\phi_{(a_n,b_n)}(0)e^{-i\hat{p}x_N}|0 \rangle = \\ &= \langle 0|\phi_{(a_1,b_1)}(0)e^{-i\hat{p}(x_1-x_2)}\dots e^{i\hat{p}(x_{N-1}-x_N)}\phi_{(a_n,b_n)}(0)|0 \rangle; \end{aligned}$$

potremmo continuare analiticamente e porre $x_k = u_k - iy_k$, in cui u_k e y_k appartengono allo spazio di Minkowski; i fattori esponenziali diventerebbero

$$e^{-i\hat{p}(x_{k-1}-x_k)} = e^{-i\hat{p}(u_{k-1}-u_k)}e^{-\hat{p}(y_{k-1}-y_k)},$$

e per l'assioma 2 e supponendo che $y_{k-1} - y_k \in \bar{V}^+$, la funzione di Wightman risulta limitata e può effettivamente essere continuata analiticamente in questa regione detta "tubo superiore". All'interno di

questo spazio possiamo considerare dei punti particolari tali che u_k non ha componente temporale, si trova quindi nello spazio euclideo tridimensionale e y_k ha solo la parte temporale e quindi si trova sulla retta dei tempi positivi (che è una retta reale), possiamo compattamente scrivere questo punto come $x'_k = (-iy_k, \mathbf{u}_k)$. Le funzioni di Schwinger altro non sono che le funzioni di Wightman calcolate nei punti euclidei

$$S_{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)}(x_1 \dots x_N) := W_{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)}(x'_1 \dots x'_N). \quad (1.20)$$

Le funzioni di Schwinger possiedono delle proprietà largamente studiate da Osterwalder e Schrader, le più importanti per i nostri scopi sono elencate sotto:

- Covarianza euclidea, le funzioni di Schwinger sono invarianti sotto trasformazioni euclidee

$$S_{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)}(\Lambda x_1 + a, \dots, \Lambda x_N + a) = S_{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)}(x_1, \dots, x_N)$$

in cui $\Lambda \in SO(4)$ e a è un vettore euclideo quadridimensionale;

- Le funzioni di Schwinger sono simmetriche nei loro argomenti;
- Per poter tornare indietro dalle funzioni di Schwinger alle funzioni di Wightman e quindi indietro allo spazio di Minkowski esse devono obbedire ad una proprietà detta "positività di Osterwalder-Schrader", ossia $\Theta(\phi_{(a_i, b_i)}(x)) = \overline{\phi_{(a_i, b_i)}(\theta x)}$ in cui $\theta(y, \mathbf{u}) = (-y, \mathbf{u})$. Questa richiesta è dovuta al fatto che l'operatore di evoluzione quando coniugato hermitianamente cambia il segno del tempo per cui anche nello spazio euclideo dobbiamo richiedere una simile proprietà. La positività di Osterwalder-Schrader rimpiazza, nelle teorie di campo euclideo, gli assiomi di positività dello spazio di Hilbert e di condizione sullo spettro dell'operatore di traslazione.

Quello che ci interessa, ora, è calcolare le funzioni di correlazione della teoria dei campi e queste possono essere ottenute operando una rotazione di Wick delle funzioni di Schwinger,

$$\langle 0 | \mathcal{T}[\phi_{(a_1, b_1)}(x_1), \dots, \phi_{(a_n, b_n)}(x_N)] | 0 \rangle = \lim_{\xi \rightarrow \frac{\pi}{2}} S_{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)}(x_1 \dots x_N).$$

Il limite è inteso nel seguente senso: le funzioni di Schwinger sono definite come le funzioni di Wightman calcolate nei punti $x'_k = (-iy_k, \mathbf{u}_k)$ (in cui ogni componente y_k è immaginaria pura) per cui farne la rotazione di Wick significa moltiplicare per l'unità immaginaria la componente $-iy_k$ di ogni x'_k . La rotazione di Wick è un trick molto interessante e consiste nel prolungare analiticamente a tempi immaginari puri ed è equivalente ad una rotazione di 90° nel piano complesso.

Capitolo 2

Rappresentazione spettrale e sviluppo perturbativo dei propagatori

Le teorie di campo libero non sono poi così interessanti; per avere campi che descrivono particelle che non interagiscono tra loro dobbiamo richiedere che la lagrangiana non contenga termini con prodotti di più di due campi per avere così delle equazioni del moto lineari nei campi. Appena siamo interessati alle interazioni (cosa di prima importanza nella fisica) le equazioni diventano non lineari e si ricorre a soluzioni approssimate.

In questo capitolo ci concentreremo sui propagatori e studieremo la rappresentazione spettrale di Källén-Lehmann che fornisce una espressione generale per la funzione di correlazione a due punti di una teoria di campo interagente come una somma pesata di propagatori liberi; dopodichè vedremo come i propagatori possano essere ottenuti tramite uno sviluppo perturbativo ed introdurremo i diagrammi di Feynman per tale scopo. Prenderemo in considerazione una teoria con un campo scalare e vedremo l'interazione del tipo $\lambda\phi^4(x)$.

2.1 La rappresentazione di Källén-Lehmann

In una teoria di campo interagente è molto complicato (se non impossibile) calcolare esattamente le funzioni di correlazione, anche per quanto riguarda quella a due punti. Grazie alla richiesta di invarianza di Lorentz e sotto alcune ipotesi sugli stati ad una o più particelle, ci è permesso determinare una forma spettrale esatta della funzione di correlazione a due punti (detta appunto rappresentazione spettrale di Källén-Lehman).

Consideriamo la funzione di Green (nel caso scalare per semplicità) a due punti nel caso $x^0 > 0$

$$\langle 0|\mathcal{T}[\phi(x)\phi(0)]|0\rangle = \langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle = \sum_i \langle 0|\phi(x)|i\rangle \langle i|\phi(0)|0\rangle,$$

alla somma contribuiscono stati ad una particella, a due particelle ed a n particelle in generale. La somma può essere divisa in due parti: la parte a cui contribuisce solo lo stato ad una particella e la parte a cui contribuiscono gli stati a più particelle:

$$\langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle = \langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle_{1 \text{ part.}} + \langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle_{piu' \text{ part.}}. \quad (2.1)$$

Il contributo ad una particella si può scrivere esplicitamente ricordando che questi stati sono univocamente determinati dal loro impulso (l'impulso della particella), per cui possiamo scrivere

$$\langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle_{1 \text{ part.}} = \int d\mathbf{p} \langle 0|\phi(x)|\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}|\phi(0)|0\rangle;$$

il primo pezzo si può riscrivere come $\langle 0|\phi(x)|\mathbf{p}\rangle = \langle 0|e^{i\hat{p}x}\phi(0)e^{-i\hat{p}x}|\mathbf{p}\rangle = e^{-ipx} \langle 0|\phi(0)|\mathbf{p}\rangle$. A questo punto il generico elemento di matrice $\langle 0|\phi(0)|\mathbf{p}\rangle$ viene parametrizzato in analogia con il campo libero

come $\langle 0|\phi(0)|\mathbf{p}\rangle = \frac{\sqrt{Z_0(p)}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}}$ da cui otteniamo

$$\langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle_{1 \text{ part.}} = \int d\mathbf{p} \frac{Z_0(p)}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} e^{-ipx}.$$

Il fatto fondamentale è che la funzione di Green è Lorentz-invariante e quindi lo sono anche i contributi ad una e a più particelle; inoltre la misura di integrazione della relazione trovata è Lorentz-invariante; ne segue che deve esserlo anche la funzione $Z_0(p)$ che sarà quindi funzione dell'unico invariante relativistico costruibile a partire dal quadrimpulso, ossia $Z_0(p) := Z_0(m^2)$ (ossia funzione dalla massa costante della particella corrispondente allo stato ad una particella). Ricordando che la (2.1) vale per $x^0 > 0$ e svolgendo lo stesso conto nel caso $x^0 < 0$ si ottiene

$$\langle 0|\mathcal{T}[\phi(x)\phi(0)]|0\rangle_{1 \text{ part.}} = Z_0(m^2) \int d\mathbf{p} \frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} (e^{iE_{\mathbf{p}}x^0} \theta(x^0) + e^{-iE_{\mathbf{p}}x^0} \theta(-x^0)). \quad (2.2)$$

Nell'equazione appena trovata riconosciamo il propagatore di Feynman moltiplicato per l'unità immaginaria.

Gli stati a multiparticelle possono essere classificati e caratterizzati tramite il loro impulso, la loro massa invariante e la loro energia; ma, al contrario degli stati monoparticellari, gli stati a più particelle non posseggono un valore fissato della massa ma uno spettro di valori possibili permessi della relazione energia-massa-impulso. Il valore di soglia minimo di questo spettro di massa è indicato con M_s . Anche gli stati a più particelle, in analogia con quelli ad una particella, risulteranno proporzionali al propagatore di Feynman ma con un valore di massa distribuito all'interno dello spettro sopra citato; vediamo di mostrarlo. Nel caso $x^0 > 0$ abbiamo che il contributo a più particelle si può scrivere come

$$\langle 0|\phi(x)\phi(0)|0\rangle_{piu' \text{ part.}} = \sum_{i>1} \langle 0|\phi(x)|i\rangle \langle i|\phi(0)|0\rangle,$$

in cui con i indichiamo tutto il set di numeri quantici dello stato a multiparticelle compreso l'impulso totale dello stato, P_i . Come in precedenza, $= \langle 0 | e^{i\hat{P}x} \phi(0) e^{-i\hat{P}x} | i \rangle$ in cui, questa volta, \hat{P} indica l'operatore di impulso totale. Mettendo assieme si ha

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x) \phi(0) | 0 \rangle_{piu' part.} &= \sum_{i>1} \langle 0 | e^{i\hat{P}x} \phi(0) e^{-i\hat{P}x} | i \rangle \langle i | \phi(0) | 0 \rangle = \\ &= \sum_{i>1} e^{-i\hat{P}_i x} \langle 0 | \phi(0) | i \rangle \langle i | \phi(0) | 0 \rangle; \end{aligned}$$

inseriamo nella precedente due funzioni delta scritte come identità

$$\begin{aligned} \int dM^2 \delta(p^2 - M^2) &= 1; \\ \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(p - P_i) &= 1, \end{aligned}$$

ottenendo

$$\begin{aligned} \sum_{i>1} e^{-i\hat{P}_i x} \langle 0 | \phi(0) | i \rangle \langle i | \phi(0) | 0 \rangle &= \\ = \int dM^2 \delta(p^2 - M^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \sum_{i>1} e^{-iP_i x} (2\pi)^4 \delta(p - P_i) \langle 0 | \phi(0) | i \rangle \langle i | \phi(0) | 0 \rangle &= \\ = \int dM^2 \delta(p^2 - M^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \sum_{i>1} (2\pi)^4 \delta(p - P_i) \langle 0 | \phi(0) | i \rangle \langle i | \phi(0) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Il fatto fondamentale è, anche qui, che la somma sugli stati deve dare una funzione del quadrimpulso che è Lorentz-invariante, quindi deve essere necessariamente una funzione di p^2 e quindi, stando alla prima delta, di M^2 . Definiamo la funzione (detta funzione spettrale)

$$\sigma(M^2) = \delta(p^2 - M^2) \sum_{i>1} (2\pi)^4 \delta(p - P_i) \langle 0 | \phi(0) | i \rangle \langle i | \phi(0) | 0 \rangle \quad (2.3)$$

per cui possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \sum_{i>1} e^{-i\hat{P}_i x} \langle 0 | \phi(0) | i \rangle \langle i | \phi(0) | 0 \rangle &= \int dM^2 \sigma(M^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} = \\ = \int dM^2 \sigma(M^2) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{2E_{\mathbf{p},M}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} e^{iE_{\mathbf{p},M}x^0}; \end{aligned}$$

considerando anche il caso $x^0 < 0$, rifacendo gli stessi conti si ottiene che il contributo a più particelle si scrive come

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathcal{T}[\phi(x) \phi(0)] | 0 \rangle_{piu' part.} &= \\ = \int dM^2 \sigma(M^2) \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{2E_{\mathbf{p},M}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} (e^{iE_{\mathbf{p},M}x^0} \theta(x^0) + e^{-iE_{\mathbf{p},M}x^0} \theta(-x^0)); \end{aligned} \quad (2.4)$$

in cui ancora riconosciamo il propagatore di Feynman moltiplicato per i ma dipendente dalla massa M (che segue una distribuzione) e non dalla massa della particella m . In definitiva mettendo assieme la (2.1), la (2.2) e la (2.4)

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathcal{T}[\phi(x) \phi(0)] | 0 \rangle &= \langle 0 | \mathcal{T}[\phi(x) \phi(0)] | 0 \rangle_{1 part.} + \langle 0 | \mathcal{T}[\phi(x) \phi(0)] | 0 \rangle_{piu' part.} = \\ &= iZ_0(m^2) \Delta_F(x, m) + i \int_{M_s}^{\infty} dM^2 \sigma(M^2) \Delta_F(x, M) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathcal{F}(\langle 0 | \mathcal{T}[\phi(x) \phi(0)] | 0 \rangle) = \frac{iZ_0(m^2)}{p^2 - m^2} + i \int_{M_s}^{\infty} dM^2 \frac{\sigma(M^2)}{p^2 - M^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

otteniamo la rappresentazione di Källén-Lehmann. Prima della freccia abbiamo la rappresentazione nello spazio delle coordinate, dopo la freccia la rappresentazione nello spazio di Fourier. Il secondo pezzo della (2.5) va inteso come una somma sui possibili stati a più particelle che partono da una soglia (che è il valore minimo della massa per avere le particelle nello stato considerato). Questa rappresentazione è di importanza fondamentale per le teorie che non possono essere sviluppate in maniera perturbativa e lega la funzione di correlazione ad una somma pesata dei propagatori liberi. La differenza tra una teoria di campo e l'altra sta nella soglia di massa M_s (ad esempio nel caso scalare è $M_s = 3m$ perchè il primo stato a più particelle ammissibile è quello a 3 particelle) e nella forma della funzione spettrale (che in teorie di campo con spin maggiori possono essere anche più di una). Come funzione analitica della variabile p^2 la (2.5) presenta un polo (reale) in corrispondenza della massa della particella del campo e una serie di tagli che partono da M_s ed arrivano all'infinito. Il fatto che non cambia da una teoria all'altra è che il termine ad una particella contribuisce con un polo semplice situato in $p^2 = m^2$.

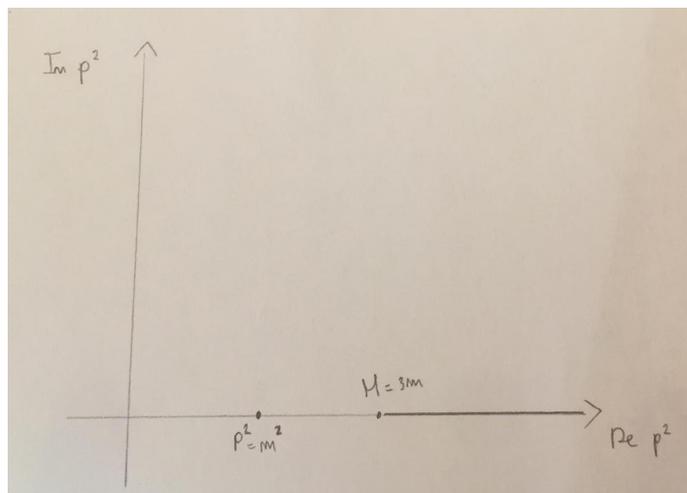


Figura 2.1: Rappresentazione di Källén-Lehmann; abbiamo un polo in $M = m$ e poi un taglio fino all'infinito dovuto agli stadi a più particelle.

2.2 Sviluppo perturbativo delle funzioni di Green

In una teoria di campo interagente, le interazioni tra vari campi o tra il campo stesso, modificano le quantità come lo stato di vuoto, i propagatori ed in generale la teoria di campo diventa non risolvibile analiticamente; i termini di interazione portano a equazioni di campo non lineari. L'idea di base per calcolare le quantità di interesse è svilupparle perturbativamente come somma delle stesse quantità nel caso libero in una costante di accoppiamento data (questo è possibile solo se la costante di accoppiamento è sufficientemente piccola). Qui ci occupiamo dello sviluppo dei propagatori e vedremo il caso più semplice, la teoria scalare detta teoria $\lambda\phi^4$. Il motivo del nome sta nel fatto che l'unico termine che è possibile aggiungere (per motivi di rinormalizzazione) di autointerazione del campo ha la forma $\lambda\phi^4$.

La prima cosa da fare per compiere uno sviluppo perturbativo è scrivere la densità di lagrangiana del campo come un termine non di interazione ed uno di interazione, nel caso scalare

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\phi, \partial\phi) + \mathcal{L}_I(\phi);$$

il funzionale generatore, guardando anche la (1.14), si scrive

$$Z[J] = \int D[\phi(x)] e^{i \int d^4x \mathcal{L}_I(\phi)} e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_0(\phi, \partial\phi) - \phi(x)J(x))} = e^{i \int d^4x \mathcal{L}_I(\phi)} Z_0[J] \quad (2.6)$$

in cui $Z_0[J]$ è il funzionale generatore della teoria scalare libera. La funzione di Green a $2k$ punti, a meno della costante $\frac{1}{Z[0]}$, si determina come (da notare che nella teoria $\lambda\phi^4(x)$ data la simmetria $\phi \rightarrow -\phi$ gli unici propagatori non nulli sono quelli a $2k$ punti; questo si vede anche dal teorema di Wick in quanto solo le contrazioni totali, ossia che non lasciano campi non contratti, danno contributi non nulli):

$$G(x_1, \dots, x_{2k}) = i^{2k} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1), \dots, \delta J(x_{2k})} \Big|_{J=0};$$

inoltre, sempre nel caso $\lambda\phi^4$, il termine di interazione della densità di lagrangiana si scrive come $\mathcal{L}_I = \frac{\lambda}{4!}\phi^4(x)$ ed il funzionale generatore (2.6) si riscrive come

$$Z[J] = e^{i \int \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x) d^4x} Z_0[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{(4!)^n n!} \left(\int d^4x \phi^4(x) \right)^n Z_0[J].$$

Per cui

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_{2k}) &= i^{2k} \left(\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_{2k})} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{(4!)^n n!} \left(\int d^4x \phi^4(x) \right)^n Z_0[J] \Big|_{J=0} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} i^{2k} \left(\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_{2k})} \right) \frac{1}{n!} \left(\int \frac{i\lambda}{4!} d^4x \phi^4(x) \right)^n \frac{1}{m!} \left(\frac{i}{2} \int \int d^4x d^4y (J(x) \Delta_F(x-y) J(y)) \right)^m \Big|_{J=0} = \quad (2.7) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} G^{(n)}(x_1, \dots, x_{2k}), \end{aligned}$$

in cui ricordiamo che è necessario fare la sostituzione $\phi(x) \rightarrow \frac{i\delta}{\delta J(x)}$ e $m = k + 2n$ (questo perchè quando le derivate funzionali agiscono sullo sviluppo in serie di Taylor del funzionale generatore della teoria libera devono lasciare un termine che non contenga più le sorgenti dato che altrimenti sarebbe identicamente nullo quando si pone $J = 0$). Per quanto detto nel secondo passaggio della (2.7) abbiamo tenuto conto solo del contributo non nullo dello sviluppo di $Z_0[J]$ quando si pone $J = 0$; inoltre abbiamo posto $\ker(\hat{K}^{-1}) = \Delta_F$ per indicare esplicitamente che si tratta del propagatore di Feynman. Si riconosce che il termine di ordine zero è proprio il propagatore libero (o meglio il numeratore della (1.16) nel caso scalare). Le $2k$ derivate funzionali possono essere fatte agire in molti modi diversi ognuno dei quali corrisponde ad un' ampiezza di cui tener conto nel computo totale della funzione di Green. Ognuno dei modi differenti può essere schematizzato con un disegno, un diagramma che prende il nome di diagramma di Feynman. Generalmente quello che si fa è disegnare i diagrammi di Feynman topologicamente indipendenti corrispondenti ad una funzione di Green, si trasformano i diagrammi in equazioni tramite le regole di Feynman (le regole son diverse da teoria a teoria) e si sommano tutte le ampiezze. Ovviamente questa sarebbe una somma infinita, l'idea è quella che il parametro λ sia piccolo abbastanza da fermarsi ad un ordine di sviluppo basso. Per costruire i diagrammi (nella teoria $\lambda\phi^4$) si prendono $2k$ punti esterni (corrispondenti, in numero, al numero di punti della funzione di Green), si considerano n vertici di interazione (corrispondenti, in numero, all'ordine di sviluppo) e si inizia a collegarli con m linee in modo che i diagrammi siano indipendenti dal punto di vista topologico. Riportiamo le regole di Feynman per i diagrammi dello sviluppo della funzione di Green per la teoria $\lambda\phi^4$

- un fattore $i\Delta_F(x-y)$ per ogni linea che inizia dal punto x e finisce al punto y ;
- un fattore $i\lambda$ per ogni vertice;
- si integra sulle coordinate di tutti i vertici (questo restituirà una delta di Dirac nello spazio degli impulsi);

- si divide per un fattore numerico, detto termine di simmetria, che tiene conto della simmetria del diagramma e che è da calcolare caso per caso;
- si sommano tutte le ampiezze ottenute per ottenere la funzione di Green cercata.

Vediamo un calcolo esplicito, calcoliamo $G^{(1)}(x_1, x_2)$.

Ricordiamo preliminarmente che $\frac{\delta}{\delta J(x_k)} \iint d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) = 2 \int d^4x J(x) \Delta_F(x-x_k)$. Abbiamo un vertice e due punti esterni per cui

$$\begin{aligned}
G^{(1)}(x_1, x_2) &= i^2 \left(\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \right) \frac{i\lambda}{4!} \left(\int d^4x \phi^4(x) \right) \frac{1}{3!} \left(\frac{i}{2} \iint d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right)^3 = \\
&= \frac{i^3 \lambda}{4!} \left(\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \left(\int d^4x \phi^4(x) \right) \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{2} \iint d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right)^2 \times \\
&\times i \left(\int d^4x J(x) \Delta_F(x-x_2) \right) = \\
&= \frac{i^6 \lambda}{2(4!)} \left(\int d^4x \phi^4(x) \right) \left(\iint d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right) \times \\
&\times \left(\int d^4x J(x) \Delta_F(x-x_2) \right) \left(\int d^4x J(x) \Delta_F(x-x_1) \right) + \\
&+ \frac{i^6 \lambda}{4(4!)} \left(\int d^4x \phi^4(x) \right) \frac{1}{2!} \left(\iint d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right)^2 \Delta_F(x_1-x_2);
\end{aligned}$$

il propagatore è la somma di due pezzi. Ricordiamo che ogni funzionale dei campi si può scrivere come funzionale di derivate funzionali corrispondenti al campo; nel nostro caso $\int d^4x d\phi^4(x) = \int d^4x \left(i \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4$. Nel primo, l'unico modo in cui il risultato sia diverso da zero (ricordiamo che alla fine bisogna porre $J = 0$, per cui se rimanesse termini contenenti le sorgenti il risultato sarebbe nullo) è applicando due derivate all'integrale doppio (ottenendo un propagatore della forma $\Delta_F(x-x)$) e le due derivate rimanenti una ad un integrale ed una all'altro (ottenendo due propagatori della forma $\Delta_F(x-x_i)$). Il secondo pezzo è non nullo solo se si tirano fuori dall'integrale doppio due propagatori della forma $\Delta_F(x-x)$. Il secondo pezzo ha un termine di simmetria pari a $\frac{1}{8}$ (dato che svolta una delle quattro derivate ci sono 3 modi in cui le restanti possano agire sul termine appena prodotto dall'azione della quarta derivata), mentre il primo ha un termine di simmetria pari a $\frac{1}{2}$ (ci sono 4×3 modi in cui le 4 derivate possono agire sui termini con un solo integrale).

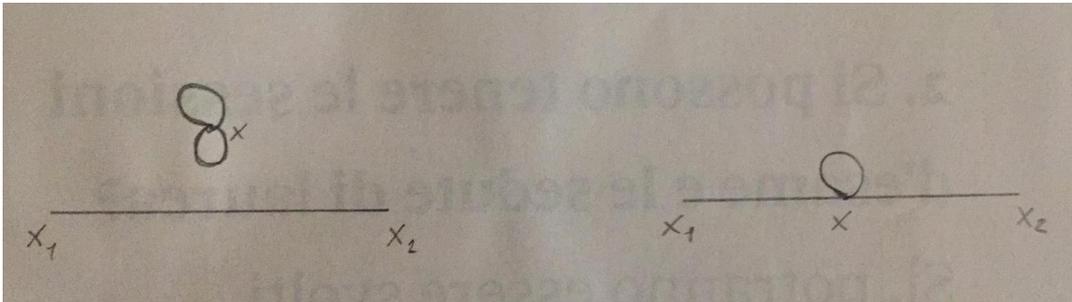


Figura 2.2: Diagrammi di Feynman per i due termini dello sviluppo al primo ordine del propagatore a due punti. A sinistra: secondo termine nello sviluppo analizzato in precedenza. A destra: primo termine dello sviluppo analizzato in precedenza.

Interpretando le funzioni di Green come l'ampiezza di un processo quantistico (in cui un certo numero di particelle viene creato, queste si propagano per poi venir distrutte) lo sviluppo perturbativo sta a significare che fissati i vertici ogni termine è un possibile "cammino".

Torniamo allo sviluppo del funzionale generatore; nello sviluppo compaiono diagrammi connessi e disconnessi la differenza sta nel fatto che in un diagramma connesso ci si può muovere da un qualunque vertice o qualunque punto esterno a qualunque altro attraverso linee interne al diagramma; per un diagramma disconnesso questo non è possibile. Tra i diagrammi che compongono lo sviluppo del funzionale generatore ci sono quelli in cui non compaiono punti esterni. Ad esempio, al primo ordine abbiamo solo un vertice e uno dei diagrammi possibili fa parte dei così detti diagrammi vuoto-vuoto ossia, come detto, diagrammi in cui non ci sono punti esterni.

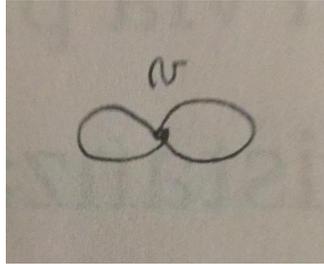


Figura 2.3: Esempio di diagramma vuoto vuoto, in cui compare un solo vertice e nessun punto esterno; è un diagramma del primo ordine.

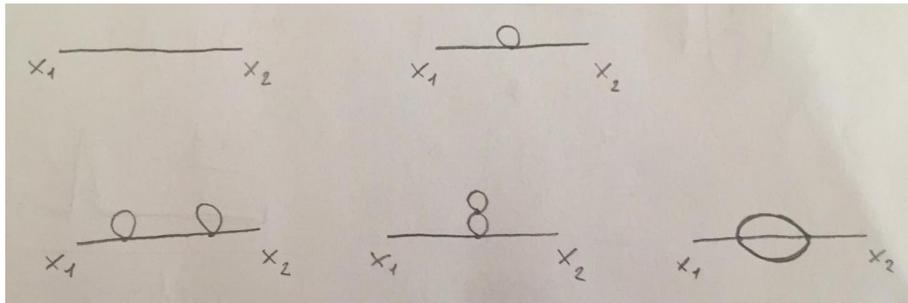


Figura 2.4: Diagrammi di Feynman per il propagatore a due punti, sviluppo fino al secondo ordine.

2.2.1 Relazione tra la rappresentazione di Källén-Lehmann e lo sviluppo perturbativo

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto la rappresentazione esatta di Källén-Lehmann per il propagatore a due punti, vogliamo capire come questa sia legata allo sviluppo perturbativo e ci spingeremo fino al secondo ordine. Come già detto l'idea dello sviluppo dei propagatori risiede nella nostra ignoranza sulla forma esatta del propagatore nel caso di teorie interagenti. I diagrammi che ci interessano sono, considerando ovviamente solo quelli connessi, riportati in Figura 2.4.

Iniziamo dal primo ordine; nello spazio degli impulsi i diagrammi si scrivono

$$\tilde{G}(p) = \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (i\lambda B_1) \frac{i}{p^2 - m_0^2},$$

in cui il termine $i\lambda B_1$ rappresenta la bolla. Nell'equazione appena scritta compare la massa m_0 che è la massa dei quanti del campo nella teoria non interagente. In generale quando abbiamo a che fare con una

teoria interagente la massa viene modificata per via delle interazioni stesse del campo. Introduciamo la quantità $m_0^2 = m^2 + \delta m^2$ in cui m^2 è la massa fisica che viene misurata e che si riduce a m_0^2 nel limite di teoria libera, ossia quando la correzione $\delta m^2 = 0$ (come vogliamo, dato che il propagatore esatto della teoria interagente dipenderà da m^2 ma quando la teoria è libera deve dipendere da m_0^2). Sostituiamo questa definizione nell'equazione scritta in precedenza

$$\begin{aligned}\tilde{G}(p) &= \frac{i}{p^2 - m^2 - \delta m^2} - \frac{i}{(p^2 - m^2 - \delta m^2)^2}(\lambda B_1) = \\ &= \frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{(p^2 - m^2)^2}\delta m^2 - \frac{i}{(p^2 - m^2)^2}(\lambda B_1) = \frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{(p^2 - m^2)^2}(\delta m^2 - \lambda B_1),\end{aligned}$$

in cui abbiamo trascurato tutti gli ordini superiori al primo ed utilizzato lo sviluppo $\frac{1}{(A+\epsilon)} = \frac{1}{A} - \frac{\epsilon}{A^2} + \dots + \frac{(-1)^{k-1}\epsilon^{k-1}}{A^k}$. Poichè la rappresentazione di Källén-Lehmann predice un polo singolo posto in $p^2 = m^2$ segue che al primo ordine

$$\delta m^2 = \lambda B_1 ; Z(m^2) = 1 ; \sigma(M^2) = 0. \quad (2.8)$$

Muoviamoci, ora, al secondo ordine; dobbiamo sommare tutti i diagrammi della figura (2.4)

$$\begin{aligned}\tilde{G}(p) &= \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2}(i\lambda B_1)\frac{i}{p^2 - m_0^2} + \\ &+ \frac{i}{p^2 - m_0^2}(i\lambda B_1)\frac{i}{p^2 - m_0^2}(i\lambda B_1)\frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2}(i\lambda^2 B_2)\frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2}(i\lambda^2 F(p^2))\frac{i}{p^2 - m_0^2},\end{aligned}$$

in cui i diagrammi del secondo ordine sono quelli della seconda riga; con $i\lambda B_1$ indichiamo la bolla singola, con $i\lambda^2 B_2$ indichiamo la bolla doppia e con $i\lambda^2 F(p^2)$ il loop dell'ultimo diagramma della Figura 2.4. Nuovamente poniamo $m_0^2 = m^2 + \delta m^2$ ed utilizziamo lo sviluppo $\frac{1}{(A+\epsilon)} = \sum_k \frac{(-1)^{k-1}\epsilon^{k-1}}{A^k}$; nei pezzi riguardanti i diagrammi del secondo ordine lo sviluppo si arresta all'ordine zero dato che questi termini contengono già termini del secondo ordine nella costante di accoppiamento; invece i pezzi relativi ai diagrammi di ordine zero ed uno vanno ora sviluppati fino ad avere termini del secondo ordine, ossia

$$\begin{aligned}\tilde{G}(p) &= \frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{(p^2 - m^2)^2}\delta m^2 + \frac{i}{(p^2 - m^2)^3}(\delta m^2)^2 - \frac{i}{(p^2 - m^2)^2}(\lambda B_1) - \frac{i}{(p^2 - m^2)^3}2\delta m^2(\lambda B_1) + \\ &+ \frac{i}{p^2 - m^2}(i\lambda B_1)\frac{i}{p^2 - m^2}(i\lambda B_1)\frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{p^2 - m^2}(i\lambda^2 B_2)\frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{p^2 - m^2}(i\lambda^2 F(p^2))\frac{i}{p^2 - m^2}.\end{aligned}$$

A questo punto sviluppiamo la funzione $F(p^2)$ nel punto $p^2 = m^2$ otteniamo

$$F(p^2) = F(m^2) + (p^2 - m^2)F'(m^2) + (p^2 - m^2)R(p^2),$$

in cui $R(p^2)$, il resto dello sviluppo, è una funzione regolare che si annulla per $p^2 = m^2$ ed è un infinitesimo superiore a $(p^2 - m^2)$; inserendo lo sviluppo nell'equazione che determina $\tilde{G}(p)$ si ottiene

$$\begin{aligned}\tilde{G}(p) &= \frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{(p^2 - m^2)^2}\delta m^2 + \frac{i}{(p^2 - m^2)^3}(\delta m^2)^2 - \frac{i}{(p^2 - m^2)^2}(\lambda B_1) - \frac{i}{(p^2 - m^2)^3}2\delta m^2(\lambda B_1) + \\ &+ \frac{i}{p^2 - m^2}(i\lambda B_1)\frac{i}{p^2 - m^2}(i\lambda B_1)\frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{p^2 - m^2}(i\lambda^2 B_2)\frac{i}{p^2 - m^2} + \\ &+ \frac{i}{p^2 - m^2}(i\lambda^2 F(m^2))\frac{i}{p^2 - m^2} + i(i\lambda^2 F'(m^2))\frac{i}{p^2 - m^2} + i(i\lambda^2 R(p^2))\frac{i}{p^2 - m^2} = \\ &= \frac{i}{p^2 - m^2}(1 - \lambda^2 F'(m^2)) + \frac{i}{(p^2 - m^2)^2}(\delta m^2 - \lambda B_1 - \lambda^2 B_2 - \lambda^2 F(m^2)) + \\ &+ \frac{i}{(p^2 - m^2)^3}((\delta m^2)^2 - 2\delta m\lambda B_1 + \lambda^2 B_1^2) - i\frac{\lambda^2 R(p^2)}{p^2 - m^2}.\end{aligned}$$

Ponendo $\delta m^2 = \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 + \lambda^2 F(m^2)$ si cancellano i termini con i poli doppio e triplo (il termine con polo triplo si cancella a meno di ordini superiori al secondo che trascuriamo). Guardando la rappresentazione di Källén-Lehmann possiamo identificare

$$Z(m^2) = 1 - \lambda^2 F'(m^2) ; \int_{3m}^{\infty} dM^2 \frac{\sigma(M^2)}{p^2 - M^2} = -\frac{\lambda^2 R(p^2)}{p^2 - m^2} := \mathcal{R}(p^2); \quad (2.9)$$

dalla seconda delle (2.10) possiamo derivare un'espressione esplicita per la funzione spettrale, infatti

$$\begin{aligned} \frac{i}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\mathcal{R}(\mu^2 + i\epsilon) - \mathcal{R}(\mu^2 - i\epsilon)) &= \frac{i}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int dM^2 \sigma(M^2) \left(\frac{1}{\mu^2 + i\epsilon - M^2} - \frac{1}{\mu^2 - i\epsilon - M^2} \right) = \\ &= \frac{i}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int dM^2 \sigma(M^2) \left(\frac{\mu^2 - i\epsilon - M^2}{(\mu^2 - M^2)^2 + \epsilon} - \frac{\mu^2 + i\epsilon - M^2}{(\mu^2 - M^2)^2 + \epsilon} \right) = \\ &= \frac{i}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int dM^2 \sigma(M^2) \left(\frac{-2i\epsilon}{(\mu^2 - M^2)^2 + \epsilon} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int dM^2 \sigma(M^2) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{(\mu^2 - M^2)^2 + \epsilon} = \int dM^2 \sigma(M^2) \delta(\mu^2 - M^2) = \sigma(\mu^2), \end{aligned}$$

in cui nel secondo passaggio si sono moltiplicate e divise le frazioni per i complessi coniugati dei corrispondenti denominatori e nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che la funzione $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{X^2 + \epsilon}$ si comporti come una delta di Dirac, nello specifico come $\pi \delta(X)$.

Capitolo 3

Introduzione alla teoria dello scattering e matrice S

La teoria dello scattering è una branca della fisica matematica e della fisica teorica che si occupa dello studio dei processi di diffusione e collisione di particelle e onde. Nella meccanica quantistica, che include la chimica quantistica, l'equazione rilevante è l'equazione di Schrödinger, sebbene vengano ampiamente utilizzate anche formulazioni equivalenti, come l'equazione di Lippmann-Schwinger (che vedremo in maggior dettaglio nelle sezioni che seguono) e le equazioni di Faddeev. Le soluzioni di interesse descrivono il movimento a lungo termine di atomi, molecole, fotoni, elettroni e protoni liberi. L'idea di base è di avere un certo numero di particelle che, provenendo da regioni macroscopicamente distanti, interagiscono su scale microscopiche (eventualmente con creazione e distruzione di particelle) per poi allontanarsi nuovamente a distanze macroscopiche. Come detto, in queste dispense vedremo la formulazione di Lippmann-Schwinger; tuttavia, in questo momento, discuteremo brevemente anche le equazioni di Faddeev. Esse sono equazioni che descrivono tutti i possibili scambi e interazioni in un sistema di tre particelle e sono infatti le equazioni non perturbative più utilizzate del problema dei tre corpi quantomeccanico. In generale, le equazioni di Faddeev necessitano di un potenziale come input che descriva l'interazione tra le singole particelle.

La quantità di maggiore importanza all'interno di questa teoria è la matrice S (o matrice di scattering) che mette in relazione lo stato iniziale e lo stato finale di un sistema fisico sottoposto a un processo di scattering e contiene quindi le ampiezze di scattering. Nelle sezioni di questo capitolo studieremo la matrice di scattering, la sua invarianza di Lorentz e come questa è legata alle sezioni d'urto e alle larghezze di decadimento (descriventi le probabilità di interazione e di decadimento). Infine studieremo le formule di riduzione di Lehmann-Symanzik-Zimmermann (dette equazioni LSZ), un metodo per calcolare gli elementi della matrice S dalle funzioni di correlazione ordinate nel tempo di una teoria dei campi quantistici.

3.1 Stati *in* e *out*

Uno stato a più particelle è uno stato che sotto una trasformazione di Lorentz trasforma come il prodotto diretto di stati ad una particella, indicheremo il generico stato a più particelle come $|\alpha\rangle$ in cui α indica l'insieme dei set di numeri quantici degli stati ad una particella che formano lo stato a più particelle.

Un processo di scattering è immaginato iniziare con un'insieme di particelle non interagenti al tempo $t \rightarrow -\infty$ (che sarà indicato con lo stato multiparticellare $|in, \alpha\rangle$) e finire con uno stato multiparticellare non interagente (che sarà indicato con $|out, \alpha\rangle$) al tempo $t \rightarrow +\infty$; Entrambi gli stati $|in, \alpha\rangle$ e $|out, \alpha\rangle$ trasformeranno come il prodotto diretto degli stati monoparticellari che li compongono. Per poter mantenere manifesta l'invarianza di Lorentz gli stati non devono dipendere dal tempo e questo comporta che gli stati $|in, \alpha\rangle$ e $|out, \alpha\rangle$ non sono il limite, rispettivamente per $t \rightarrow -\infty$ e per $t \rightarrow +\infty$, di un certo stato $|\alpha\rangle$ dipendente dal tempo; è importante notare anche che, per questa definizione degli stati *in* ed *out*, osservatori differenti osservano vettori di stato equivalenti ma non uguali. Se gli stati sono autostati della hamiltoniana, essi non possono essere, per il principio di indeterminazione, localizzati nel tempo; dobbiamo considerare una sovrapposizione di stati

$$\int g(\alpha)|\alpha\rangle d\alpha,$$

in cui la funzione $g(\alpha)$ è liscia e non nulla solo in una regione di energie pari a ΔE . Gli stati *in* ed *out* sono quindi definiti dalle sovrapposizioni

$$\begin{aligned} \int g(\alpha)|in, \alpha\rangle d\alpha &\Rightarrow e^{-i\hat{H}t} \int g(\alpha)|in, \alpha\rangle d\alpha = \int g(\alpha)e^{-iE_\alpha t}|in, \alpha\rangle d\alpha; \\ \int g(\alpha)|out, \alpha\rangle d\alpha &\Rightarrow e^{-i\hat{H}t} \int g(\alpha)|out, \alpha\rangle d\alpha = \int g(\alpha)e^{-iE_\alpha t}|out, \alpha\rangle d\alpha. \end{aligned}$$

Gli stati *in* ed *out* sono quindi definiti come stati autostati asintotici della hamiltoniana totale, \hat{H} , con autovalori uguali all'autovalore dello stato libero che è autostato della hamiltoniana non interagente, \hat{H}_0 ; in formule abbiamo che

$$\begin{aligned} \hat{H}_0|free, \alpha\rangle &= E_\alpha|free, \alpha\rangle; \\ \hat{H}|in, \alpha\rangle &= E_\alpha|in, \alpha\rangle; \\ \hat{H}|out, \alpha\rangle &= E_\alpha|out, \alpha\rangle; \end{aligned} \tag{3.1}$$

con le condizioni che

$$\begin{aligned} |in/out, t\rangle &= \int d\alpha g(\alpha)e^{-iE_\alpha t}|in/out, \alpha\rangle = e^{-i\hat{H}t} \int d\alpha g(\alpha)|in/out, \alpha\rangle \rightarrow \\ &\rightarrow \int d\alpha g(\alpha)e^{-iE_\alpha t}|free, \alpha\rangle = e^{-i\hat{H}t} \int d\alpha g(\alpha)|free, \alpha\rangle = |free, t\rangle, \end{aligned} \tag{3.2}$$

nel limite di $t \rightarrow -\infty$ per lo stato *in* e nel limite $t \rightarrow +\infty$ per lo stato *out*. Le condizioni (3.2) si possono scrivere compattamente come

$$|in/out, \alpha\rangle = \hat{\Omega}(\mp\infty)|free, \alpha\rangle, \tag{3.3}$$

in cui $\hat{\Omega}(\mp\infty) = e^{i\hat{H}t}e^{-i\hat{H}_0 t}$. Le (3.2) portano ad un'importante conseguenza; moltiplichiamole scalarmente per una sovrapposizione di stati con un insieme di set di numeri quantici β

$$\begin{aligned} &\int \int d\alpha d\beta e^{-i(E_\alpha - E_\beta)t} g(\alpha)g^*(\beta) \langle \beta, in/out | in/out, \alpha \rangle = \\ &= \int \int d\alpha d\beta e^{-i(E_\alpha - E_\beta)t} g(\alpha)g^*(\beta) \langle \beta, free | free, \alpha \rangle = \\ &\Rightarrow \langle \beta, in/out | in/out, \alpha \rangle = \langle \beta, free | free, \alpha \rangle = \delta(\beta - \alpha); \end{aligned}$$

supponendo che l'equazione appena scritta sia vera per ogni funzione g liscia, gli stati *in* ed *out* hanno la stessa normalizzazione degli stati liberi. La seconda e terza equazione agli autovalori delle (3.1) possono essere riscritte ed è possibile trovarne una soluzione formale; infatti supponendo la hamiltoniana totale della forma $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ possiamo scrivere

$$\hat{H}|in/out, \alpha \rangle = (\hat{H}_0 + \hat{V})|in/out, \alpha \rangle = E_\alpha|in/out, \alpha \rangle \Rightarrow (E_\alpha - \hat{H}_0)|in/out, \alpha \rangle = \hat{V}|in/out, \alpha \rangle .$$

La soluzione formale può essere trovata notando che gli stati asintotici si devono ridurre allo stato libero quando $\hat{V} = 0$, per cui saranno della forma "stato libero + correzioni", ossia

$$|in/out, \alpha \rangle = |free, \alpha \rangle + \frac{\hat{V}}{(E_\alpha - \hat{H}_0 \pm i\epsilon)}|in/out, \alpha \rangle, \quad (3.4)$$

in cui $+i\epsilon$ è per gli stati *in* mentre $-i\epsilon$ è per gli stati *out*; il motivo dell'aggiunta di questo piccolo termine immaginario è che l'operatore $(E_\alpha - \hat{H}_0)$ non è invertibile dato che possiede un autovettore con autovalore nullo (sono esattamente gli stati asintotici gli autostati con autovalore nullo), l'aggiunta del termine ha il compito di rendere invertibile l'operatore. Espandendo la (3.4) su un set completo di autostati liberi si ottiene

$$|in/out, \alpha \rangle = |free, \alpha \rangle + \int d\beta \frac{\langle \beta, free | \hat{V} | in/out, \alpha \rangle}{(E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon)} |free, \beta \rangle; \quad (3.5)$$

per concludere che le (3.5) siano soluzione del nostro problema dobbiamo verificare che soddisfino le condizioni (3.2). Consideriamo la sovrapposizione $|in/out, \alpha, t \rangle$ e sostituiamoci la (3.4):

$$\begin{aligned} |in/out, t \rangle &= \int d\alpha g(\alpha) e^{-iE_\alpha t} |in/out, \alpha \rangle = \\ &= \int d\alpha g(\alpha) e^{-iE_\alpha t} \left(|free, \alpha \rangle + \int d\beta \frac{\langle \beta, free | \hat{V} | in/out, \alpha \rangle}{(E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon)} |free, \beta \rangle \right) = \\ &= |free, t \rangle + \iint d\alpha d\beta g(\alpha) e^{-iE_\alpha t} \frac{\langle \beta, free | \hat{V} | in/out, \alpha \rangle}{(E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon)} |free, \beta \rangle; \end{aligned}$$

concentriamoci sul termine integrale, nello specifico sull'integrale nella variabile α

$$\int d\alpha g(\alpha) e^{-iE_\alpha t} \frac{\langle \beta, free | \hat{V} | in/out, \alpha \rangle}{(E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon)} := I_\alpha.$$

L'integrale I_α va valutato su un contorno di integrazione diverso a seconda che lo stato in esame sia *in* o *out* (per via del limite temporale che deve essere preso e conseguentemente per l'applicabilità del lemma di Jordan); le possibili singolarità nascono (oltre che dal denominatore per cui si hanno poli in $E_\alpha = E_\beta - i\epsilon$ per stati *in* e $E_\alpha = E_\beta + i\epsilon$ per stati *out*) dalla funzione $g(\alpha)$ e da $\langle \beta, free | \hat{V} | in/out, \alpha \rangle$ che potrebbero averne in prossimità del valore E_α . Per poterci dimenticare di queste due possibili singolarità dobbiamo supporre che il tempo t sia, in modulo, molto maggiore della dimensione temporale tipica del pacchetto d'onde (per eliminare la singolarità di $g(\alpha)$) e dei tempi caratteristici dell'interazione (per sopprimere la singolarità legata a $\langle \beta, free | \hat{V} | in/out, \alpha \rangle$); per quanto riguarda i poli semplici, notiamo che questi si trovano fuori dai contorni di integrazione che devono essere presi rispettivamente nei due casi e quindi non contribuiscono all'integrale. In definitiva si ha che nei limiti $t \rightarrow \pm\infty$, $I_\alpha = 0$; questo assicura che gli stati asintotici *in* ed *out* tendano asintoticamente allo stato libero. Le equazioni (3.5) sono dette di Lippmann-Schwinger e sono una riscrittura dell'equazione di Schrödinger alla luce delle condizioni asintotiche (3.2). Le equazioni di Lippmann-Schwinger sono utili in un numero molto elevato di situazioni che coinvolgono lo scattering di due corpi. Per tre o più corpi in collisione non è adatta; tuttavia, ci sono approssimazioni che consentono di ridurre un problema a molti corpi a una serie di problemi a due corpi.

3.2 Matrice di scattering, rate e sezione d'urto

La matrice di scattering è l'elemento ultimo da calcolare per poter studiare eventi di interazione; ad essa sono legati sia la sezione d'urto che le larghezze di decadimento.

3.2.1 La matrice di scattering e l'operatore S

Dati uno stato *in*, $|in, \alpha\rangle$, ed uno stato *out*, $|out, \beta\rangle$, potremmo chiederci quale sia la probabilità che lo stato *in*, dopo l'interazione, sia lo stato *out*; dalle regole base di meccanica quantistica sappiamo che questa altro non è che il quadrato del prodotto scalare dei due stati

$$P(\alpha \rightarrow \beta) = |\langle \beta, out | in, \alpha \rangle|^2.$$

Se definiamo i seguenti prodotti scalari

$$S_{\alpha\beta} = \langle \beta, out | in, \alpha \rangle ; S_{\beta\alpha}^* = \langle \alpha, in | out, \beta \rangle \quad (3.6)$$

possiamo scrivere che la probabilità di transizione tra i due stati è data da

$$P(\alpha \rightarrow \beta) = |S_{\alpha\beta}|^2 = |S_{\beta\alpha}^*|^2. \quad (3.7)$$

Le (3.6) definisce gli elementi di matrice della matrice S di scattering; nel caso in cui non ci siano interazioni le (3.6) restituiscono semplicemente una delta di Dirac dei due stati liberi.

Generalmente si definisce un operatore, detto operatore \hat{S} , in maniera tale che i suoi elementi di matrice tra gli stati liberi siano gli elementi della matrice di scattering, in altri termini (usufruendo delle (3.3))

$$\langle \alpha, free | \hat{S} | free, \beta \rangle := S_{\alpha\beta} = \langle \beta, out | in, \alpha \rangle = \langle \alpha, free | \hat{\Omega}^\dagger(+\infty) \hat{\Omega}(-\infty) | free, \alpha \rangle, \quad (3.8)$$

per cui l'operatore \hat{S} si scrive $\hat{S} = \hat{\Omega}^\dagger(+\infty) \hat{\Omega}(-\infty)$.

A questo punto vogliamo determinare una formulazione approssimata della matrice di scattering per permetterci di poter calcolare le ampiezze di transizione in maniera più semplice. Consideriamo l'equazione (3.2) nel caso di stato *in* ed inseriamo l'identità sotto forma di relazione di completezza degli stati *out*:

$$\begin{aligned} |in, t\rangle &= \int \int d\alpha d\beta g(\alpha) e^{-iE_\alpha t} |out, \beta\rangle \langle \beta, out | in, \alpha \rangle = \int \int d\alpha d\beta g(\alpha) e^{-iE_\alpha t} |out, \beta\rangle S_{\alpha\beta} = \\ &= \int \int d\alpha d\beta g(\alpha) e^{-iE_\beta t} |out, \beta\rangle S_{\alpha\beta} \rightarrow \int \int d\alpha d\beta g(\alpha) e^{-iE_\beta t} |free, \beta\rangle S_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

in cui nel terzo passaggio si è usato il fatto che la matrice S deve contenere $\delta(E_\alpha - E_\beta)$, per via della conservazione dell'energia; nel fare il limite (il limite è preso per $t \rightarrow +\infty$ dato che è uno stato *out*) si è considerato $g(\beta) = 1$. Mettiamo da parte il risultato (3.9) e concentriamoci sull'equazione

$$|in, t\rangle = |free, t\rangle + \int \int d\alpha d\beta g(\alpha) e^{-iE_\alpha t} \frac{\langle \beta, free | \hat{V} | in, \alpha \rangle}{(E_\alpha - E_\beta + i\epsilon)} |free, \beta\rangle$$

nel limite $t \rightarrow +\infty$; in questo caso il contorno di integrazione deve essere chiuso nel semipiano a parte immaginaria negativa del piano complesso di E_α . All'interno di questo contorno di integrazione è contenuto il polo semplice $E_\alpha = E_\beta - i\epsilon$ per cui l'integrale non è nullo; considerando una stima asintotica si ha

$$\begin{aligned} |in, t\rangle &\rightarrow \\ &\rightarrow |free, t\rangle - 2\pi i \int \int d\alpha d\beta g(\alpha) e^{-iE_\beta t} \delta(E_\alpha - E_\beta) \langle \beta, free | \hat{V} | in, \alpha \rangle |free, \beta\rangle = \\ &= \int d\beta g(\beta) e^{-iE_\beta t} |free, \beta\rangle - 2\pi i \int \int d\alpha d\beta g(\alpha) e^{-iE_\beta t} \delta(E_\alpha - E_\beta) \langle \beta, free | \hat{V} | in, \alpha \rangle |free, \beta\rangle; \end{aligned}$$

per cui in definitiva

$$|in, t \rangle \rightarrow \int d\beta e^{-iE_\beta t} |free, \beta \rangle \left[g(\beta) - 2\pi i \int d\alpha g(\alpha) \delta(E_\alpha - E_\beta) \langle \beta, free | \hat{V} | in, \alpha \rangle \right]. \quad (3.10)$$

Confrontando la (3.9) e la (3.10) si ottiene una riscrittura della matrice S

$$\begin{aligned} & \int \int d\alpha d\beta g(\alpha) e^{-iE_\beta t} |free, \beta \rangle S_{\alpha\beta} = \\ & = \int d\beta e^{-iE_\beta t} |free, \beta \rangle \left[g(\beta) - 2\pi i \int d\alpha g(\alpha) \delta(E_\alpha - E_\beta) \langle \beta, free | \hat{V} | in, \alpha \rangle \right] \Rightarrow \\ & \Rightarrow \int d\alpha g(\alpha) S_{\alpha\beta} = g(\beta) - 2\pi i \int d\alpha g(\alpha) \delta(E_\alpha - E_\beta) \langle \beta, free | \hat{V} | in, \alpha \rangle \Rightarrow \\ & \Rightarrow S_{\alpha\beta} = \delta(\beta - \alpha) - 2\pi i \delta(E_\alpha - E_\beta) \langle \beta, free | \hat{V} | in, \alpha \rangle; \end{aligned}$$

nel caso di interazione non troppo forte possiamo approssimare la formula appena trovata nel seguente modo

$$S_{\alpha\beta} \approx \delta(\beta - \alpha) - 2\pi i \delta(E_\alpha - E_\beta) \langle \beta, free | \hat{V} | free, \alpha \rangle. \quad (3.11)$$

l'approssimazione (3.11) è detta approssimazione di Born e consente una valutazione decisamente più facile della matrice S dato che lo stato libero è conosciuto.

E' possibile studiare la matrice di scattering anche con altre tecniche, ad esempio scomponendola sugli autostati del momento angolare; questa procedura che non tratteremo è detta sviluppo in onde parziali.

3.2.2 Invarianza di Lorentz e proprietà di unitarietà della matrice S

Vogliamo studiare alcune proprietà della matrice di scattering, prima di tutto vogliamo mostrare che la matrice di scattering è unitaria. Consideriamo i seguenti integrali

$$\begin{aligned} \int d\beta \hat{S}^\dagger \hat{S} &= \int d\beta S_{\beta\gamma}^* S_{\alpha\beta} = \int d\beta \langle \gamma, in | out, \beta \rangle \langle \beta, out | in, \alpha \rangle = \delta(\gamma - \alpha) \Rightarrow \hat{S}^\dagger \hat{S} = \mathbf{1}; \\ \int d\beta \hat{S} \hat{S}^\dagger &= \int d\beta S_{\beta\alpha} S_{\gamma\beta}^* = \int d\beta \langle \alpha, out | in, \beta \rangle \langle \beta, in | out, \gamma \rangle = \delta(\gamma - \alpha) \Rightarrow \hat{S} \hat{S}^\dagger = \mathbf{1}; \end{aligned}$$

ossia la matrice \hat{S} è unitaria; un'importante conseguenza di questo è il teorema ottico (che accenniamo solamente) il quale ci consente di dire che il rate totale di uno stato iniziale con un certo numero di particelle è uguale al rate totale di uno stato iniziale in cui le particelle sono sostituite dalle loro antiparticelle e gli spin cambiati di segno. Ad esempio, il rate di decadimento di una particella è uguale al rate di decadimento della corrispondente antiparticella con spin opposto.

Veniamo, adesso, all'invarianza di Lorentz; sappiamo che per ogni trasformazione di Lorentz propria ortocrona possiamo definire un operatore unitario nello spazio di Hilbert che agisce in un certo modo sugli stati in o out . Richiedere l'invarianza di Lorentz significa richiedere che l'operatore unitario rappresentazione del gruppo di Lorentz agisce nello stesso modo sugli stati in e out . Poichè trasformare gli stati con una trasformazione unitaria non cambia la fisica, abbiamo

$$S_{\alpha\beta} = \langle \beta, out | in, \alpha \rangle = \langle \beta, out | \hat{U}^\dagger(\Lambda, a^\mu) \hat{U}(\Lambda, a^\mu) | in, \alpha \rangle, \quad (3.12)$$

in cui $\Lambda \in SL(2, \mathbf{C})$ e $a^\mu \in \mathbf{M}$; la (3.12) mostra l'invarianza di Lorentz della matrice di scattering e, conseguentemente, delle ampiezze e probabilità di transizione. La (3.12), e quindi la Lorentz-invarianza della matrice di scattering, ci consente di dire anche altro: il primo membro non dipende dal quadrivettore a^μ

mentre il membro di destra ci dipende attraverso l'operatore di traslazione $e^{-i(\hat{p}_\alpha - \hat{p}_\beta)a}$ ma questo non può essere; anche il membro di destra deve essere indipendente da a^μ e l'unico modo è che si abbia $p_\alpha = p_\beta$ ossia che si abbia la conservazione del quadrimpulso totale. Dopo questa analisi potremo scrivere la matrice di scattering come il prodotto tra un elemento di matrice ed una delta di Dirac che assicura la conservazione del quadrimpulso.

L'invarianza di Lorentz della matrice di scattering si traduce nel fatto che l'operatore \hat{S} (definito nella (3.8)) deve commutare con l'operatore che fornisce la rappresentazione del gruppo di Poincaré e, in definitiva se consideriamo trasformazioni infinitesime, che l'operatore \hat{S} commuta con tutti i generatori della trasformazione. Quanto detto è sempre vero nel caso di teoria libera dato che l'operatore che fornisce la rappresentazione del gruppo di Poincaré è lo stesso per tutti gli stati mentre non è necessariamente vero nel caso di teoria interagente dato che gli operatori che implementano la trasformazione del gruppo di Poincaré possono essere diversi o agire diversamente per gli stati *in* ed *out*. Vogliamo determinare delle condizioni che assicurino l'invarianza di Lorentz della matrice di scattering. Dall'algebra di Lie del gruppo di Poincaré sappiamo che i generatori devono soddisfare

$$\begin{aligned}
[\hat{J}^i, \hat{J}^j] &= i\epsilon^{ijk} \hat{J}_k; \\
[\hat{J}^i, \hat{K}^j] &= i\epsilon^{ijk} \hat{K}_k; \\
[\hat{K}^i, \hat{K}^j] &= -i\epsilon^{ijk} \hat{J}_k; \\
[\hat{J}^i, \hat{P}^j] &= i\epsilon^{ijk} \hat{P}_k; \\
[\hat{K}^i, \hat{P}^j] &= i\delta^{ij} \hat{H}; \\
[\hat{J}^i, \hat{H}] &= 0; \\
[\hat{P}^i, \hat{H}] &= 0; \\
[\hat{P}^i, \hat{P}^j] &= 0; \\
[\hat{K}^i, \hat{H}] &= -i\hat{P}^i;
\end{aligned} \tag{3.13}$$

generalmente (esclusi pochi casi specifici) le teorie di campo interagente prevedono hamiltoniane di interazione della forma $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ e si può porre $\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{P}}_0$ e $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{J}}_0$ in cui $\hat{\mathbf{P}}_0$ e $\hat{\mathbf{J}}_0$ sono i generatori di traslazione e rotazione della teoria non interagente. Ammesso che \hat{V} commuti con gli operatori di momento angolare e di impulso alcune delle relazioni di commutazione (3.13) sono soddisfatte banalmente dato che i generatori della trasformazione sono quelli del caso di teoria non interagente. Per quanto riguarda il generatore $\hat{\mathbf{K}}$, questo non può essere posto uguale al generatore dei boost nel caso non interagente dato che altrimenti si avrebbe

$$[\hat{K}^i, \hat{P}^j] = [\hat{K}_0^i, \hat{P}_0^j] = i\delta^{ij} \hat{H}_0 = i\delta^{ij} \hat{H} \Rightarrow \hat{H} = \hat{H}_0$$

il che, ovviamente non è vero nel caso di interazioni. E' possibile cercare il generatore $\hat{\mathbf{K}}$ nella forma $\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{K}}_0 + \hat{\mathbf{Q}}$; inserendo questa scrittura nell'ultimo commutatore otteniamo

$$\begin{aligned}
-i\hat{P}^i &= -i\hat{P}_0^i = [\hat{K}_0^i + \hat{Q}^i, \hat{H}] = [\hat{K}_0^i + \hat{Q}^i, \hat{H}_0 + \hat{V}] = \\
&= [\hat{K}_0^i, \hat{H}_0] + [\hat{K}_0^i, \hat{V}] + [\hat{Q}^i, \hat{H}_0] + [\hat{Q}^i, \hat{V}] = -i\hat{P}_0^i + [\hat{K}_0^i, \hat{V}] + [\hat{Q}^i, \hat{H}] \Rightarrow [\hat{K}_0^i, \hat{V}] = -[\hat{Q}^i, \hat{H}];
\end{aligned}$$

per determinare il generatore dei boost nella teoria interagente dobbiamo risolvere l'equazione appena scritta. La sola esistenza di generatori che soddisfino l'algebra (3.13) non assicura, come detto in precedenza, l'invarianza di Lorentz della teoria; infatti è necessario che questi operatori siano gli stessi e agiscano nello stesso modo sugli stati *in* ed *out*. La condizione che dobbiamo imporre è che l'operatore \hat{Q} sia liscio e si annulli nei limiti $t \rightarrow \pm\infty$.

In conclusione con le condizioni:

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{V}; \\
\hat{\mathbf{P}} &= \hat{\mathbf{P}}_0; \\
\hat{\mathbf{J}} &= \hat{\mathbf{J}}_0; \\
\hat{\mathbf{K}} &= \hat{\mathbf{K}}_0 + \hat{\mathbf{Q}}; \\
\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \hat{\mathbf{Q}} &= \hat{0},
\end{aligned} \tag{3.14}$$

si ha l'invarianza di Lorentz della matrice di scattering.

3.2.3 Sezione d'urto e larghezza di decadimento

A questo punto siamo pronti per legare la matrice di scattering alle quantità di interesse fisico dal punto di vista osservativo-sperimentale.

Consideriamo un volume cubico V , in cui avviene il nostro processo di scattering, con le condizioni periodiche al bordo in modo da avere i momenti discretizzati e pari a $\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3)$ in cui n_i sono interi e $V = L^3$. La normalizzazione degli stati sarà data da

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \left(\frac{V}{(2\pi)^3} \right)^N \delta_{\alpha\beta},$$

dato che la generica delta degli impulsi viene riscritta $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_\beta) = \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{\mathbf{p}_\alpha \mathbf{p}_\beta}$, ed in cui N è il numero totale di particelle negli stati.

Se definiamo lo stato nel volume V , indicato come $|\alpha, V\rangle$, come

$$|\alpha, V\rangle = \left(\frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{\frac{N_\alpha}{2}} |\alpha\rangle,$$

la normalizzazione si scrive nella forma consueta

$$\langle V, \alpha | \beta, V \rangle = \delta_{\alpha\beta}.$$

A questo punto, la matrice di scattering si scrive come

$$S_{\alpha\beta} = \langle \beta | \alpha \rangle = \left(\frac{V}{(2\pi)^3} \right)^{\frac{N_\alpha + N_\beta}{2}} \langle V, \beta | \alpha, V \rangle = \left(\frac{V}{(2\pi)^3} \right)^{\frac{N_\alpha + N_\beta}{2}} S_{\alpha\beta, V},$$

in cui $S_{\alpha\beta, V}$ indica la matrice di scattering calcolata dagli stati nel volume cubico; la probabilità di transizione in uno stato all'interno del volume sarà quindi data da

$$P(\alpha \rightarrow \beta) = |S_{\alpha\beta, V}|^2 = \left(\frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{N_\alpha + N_\beta} |S_{\alpha\beta}|^2.$$

Notiamo che la più piccola celletta dello spazio degli impulsi di una particella ha una densità di stati di impulso pari a $\frac{(2\pi)^3}{V}$, quindi nella probabilità di transizione dobbiamo considerare il fatto che non transiremo fino ad uno stato con numeri quantici fissati ma che arriveremo in un insieme di stati in un certo range di numeri quantici; il numero totale di stati che possiamo raggiungere è $d\mathcal{N}_\beta = \left(\frac{V}{(2\pi)^3} \right)^{N_\beta} d\beta$, in cui N_β è il numero di particelle nello stato considerato. Tenendo conto di questo fatto, la probabilità totale di transire fino ad uno stato con un range di numeri quantici $d\beta$ è data da

$$dP(\alpha \rightarrow \beta) = P(\alpha \rightarrow \beta) d\mathcal{N}_\beta = \left(\frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{N_\alpha + N_\beta} |S_{\alpha\beta}|^2 \left(\frac{V}{(2\pi)^3} \right)^{N_\beta} d\beta = \left(\frac{(2\pi)^3}{V} \right)^{N_\alpha} |S_{\alpha\beta}|^2 d\beta.$$

Per proseguire dobbiamo fare due ulteriori richieste: per prima cosa dobbiamo introdurre un intervallo temporale $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ (anch'esso con condizioni periodiche al bordo) così come abbiamo introdotto un volume spaziale e, in secondo luogo, che l'elemento della matrice di scattering si possa scrivere come $S_{\alpha\beta} = 2i\pi\delta^{(3)}(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_\beta)\delta(E_\alpha - E_\beta)M_{\alpha\beta}$. Nella probabilità di transizione le delta entrano al quadrato ma, date le condizioni periodiche al bordo imposte, si ha

$$\begin{aligned}(\delta^{(3)}(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_\beta))^2 &= \delta^{(3)}(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_\beta)\delta^{(3)}(\mathbf{0}) = \delta^{(3)}(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_\beta)\frac{V}{(2\pi)^3}; \\(\delta(E_\alpha - E_\beta))^2 &= \delta(E_\alpha - E_\beta)\delta(0) = \delta(E_\alpha - E_\beta)\frac{T}{2\pi}.\end{aligned}$$

Inserendo nella equazione che determina la probabilità di transizione

$$\begin{aligned}dP(\alpha \rightarrow \beta) &= \left(\frac{(2\pi)^3}{V}\right)^{N_\alpha} (2\pi)^2 (\delta^{(3)}(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_\beta))^2 (\delta(E_\alpha - E_\beta))^2 |M_{\alpha\beta}|^2 d\beta = \\&= \left(\frac{(2\pi)^3}{V}\right)^{N_\alpha-1} 2\pi T \delta^{(3)}(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_\beta) \delta(E_\alpha - E_\beta) |M_{\alpha\beta}|^2 d\beta.\end{aligned}\tag{3.15}$$

È importante ricordare che le due delta di Dirac sono definite in regioni di spazio finite (nel volume spaziale e nell'intervallo temporale introdotti con condizioni periodiche al bordo); per cui se consideriamo volumi spaziali e intervalli temporali sufficientemente grandi il prodotto delle delta si scriverà come una delta unica

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{V \rightarrow \infty} \delta^{(3)}(\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_\beta) \delta(E_\alpha - E_\beta) = \delta^{(4)}(p_\alpha - p_\beta);$$

la (3.15) diventa

$$dP(\alpha \rightarrow \beta) = \left(\frac{(2\pi)^3}{V}\right)^{N_\alpha-1} 2\pi T \delta^{(4)}(p_\alpha - p_\beta) |M_{\alpha\beta}|^2 d\beta.\tag{3.16}$$

Dalla (3.16) è possibile definire la probabilità per unità di tempo, detto rate di transizione

$$\begin{aligned}d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta) &= \frac{dP(\alpha \rightarrow \beta)}{T} = \left(\frac{(2\pi)^3}{V}\right)^{N_\alpha-1} 2\pi \delta^{(4)}(p_\alpha - p_\beta) |M_{\alpha\beta}|^2 d\beta = \\&= (2\pi)^{(3N_\alpha-2)} V^{(1-N_\alpha)} \delta^{(4)}(p_\alpha - p_\beta) |M_{\alpha\beta}|^2 d\beta;\end{aligned}\tag{3.17}$$

la (3.17) è la formula principe per calcolare quantità misurabili negli eventi di scattering.

Ci sono due casi di maggior interesse della (3.16):

- $N_\alpha = 1$: non abbiamo un evento di scattering ma il decadimento di una particella dallo stato quantico α allo stato multiparticellare β . Il rate di decadimento è dato da

$$d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta) = 2\pi \delta^{(4)}(p_\alpha - p_\beta) |M_{\alpha\beta}|^2 d\beta\tag{3.18}$$

ed essendo questa la probabilità per unità di tempo di decadere ha senso solo se calcolata per un tempo $T \ll \tau_\alpha$, in cui τ_α è la vita media della particella (altrimenti la probabilità sarebbe sempre vicina ad 1 dato che per tempi lunghi la popolazione di particelle non decadute decresce esponenzialmente). Il rate di decadimento totale è dato dalla somma dei rate di decadimento dei singoli canali in cui la particella instabile può decadere. Un'interessante ed utile applicazione di questo si ha quando particelle instabili si formano da eventi di scattering per poi decadere; in questi casi si osserva, nell'andamento della sezione d'urto, un picco di forma lorentziana (la Breit-Wigner) centrato sull'energia necessaria per la creazione della particella instabile. La larghezza del picco (la larghezza di decadimento ossia il rate per unità di tempo) è legata alla vita media della particella come $\tau_\alpha = \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{\hbar}{\Gamma}$. Un altro interessante esempio di quanto detto sono le risonanze adroniche.

- $N_\alpha = 2$: abbiamo due particelle che si scontrano per generare uno stato a più particelle. In questo caso il rate dipende inversamente dal volume, il che significa che dipende dalla densità di particelle. Generalmente, per casi in cui $N_\alpha > 1$ si usa la sezione d'urto definita come il rate per il flusso di particelle entranti. Il flusso di particelle entranti si scrive come

$$\Phi_\alpha = \frac{v_\alpha}{V} = v_\alpha n_\alpha,$$

in cui v_α è la velocità relativa delle particelle entranti e n_α è la densità numerica di particelle entranti; con questa definizione la sezione d'urto differenziale (ossia da integrare nelle variabili da marginalizzare) è data da

$$d\sigma(\alpha \rightarrow \beta) := \frac{d\Gamma(\alpha \rightarrow \beta)}{\Phi_\alpha} = (2\pi)^4 \frac{|M_{\alpha\beta}|^2}{v_\alpha} \delta^{(4)}(p_\alpha - p_\beta) d\beta \quad (3.19)$$

È importante notare che è possibile mostrare che i rate e le sezioni d'urto sono invarianti di Lorentz, è quindi possibile calcolarli nel sistema di riferimento che si ritiene più adatto. Notiamo, inoltre, che i rate (dalla (3.17)) dipendono da un elemento di matrice (che comporta la sfida computazionale maggiore) che determina quali processi sono possibili e quali no, e dall'elemento dello spazio delle fasi racchiuso in $d\beta$ e che contiene il prodotto degli spazi delle fasi delle singole particelle dello stato multiparticellare finale.

3.3 Formule di Lehmann-Symanzik-Zimmermann e diagrammi per la matrice S

Le formule di riduzione di Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ) sono delle relazioni che legano la funzione di Green a q punti all'elemento di matrice di scattering della reazione tra l particelle iniziali e $n = q - l$ particelle finali.

3.3.1 Formule di riduzione LSZ

Per prima cosa, riprendiamo il discorso sugli stati asintotici; abbiamo detto che gli stati *in* ed *out* non sono il limite per tempi, in modulo, grandi di uno stato dipendente dal tempo ed abbiamo anche detto che gli stati asintotici devono ridursi, in qualche modo, agli stati liberi. La convergenza che possiamo richiedere è solo debole in quanto altrimenti otterremo una teoria non interagente ad ogni istante; formalmente avremo

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \alpha | \phi^{(a,b)}(x) | \beta \rangle &= \sqrt{Z_{out}} \langle \alpha | \phi_{out}^{(a,b)}(x) | \beta \rangle, \quad \hat{\mathcal{P}}(x) \phi_{out}^{(a,b)}(x) = 0; \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \alpha | \phi^{(a,b)}(x) | \beta \rangle &= \sqrt{Z_{in}} \langle \alpha | \phi_{in}^{(a,b)}(x) | \beta \rangle, \quad \hat{\mathcal{P}}(x) \phi_{in}^{(a,b)}(x) = 0; \end{aligned} \quad (3.20)$$

in cui $Z_{out} = Z_{in} = Z$ sono costanti di rinormalizzazione e l'operatore $\hat{\mathcal{P}}(x)$ è l'operatore cinetico del campo (l'equazione di campo del campo considerato, ad esempio, l'equazione di Klein-Gordon per il campo scalare, equazione di Dirac per campo spinoriale, etc etc); l'apice (a, b) indica la rappresentazione di Lorentz del campo.

Scriviamo il generico campo come espansione in termini dei loro modi normali

$$\begin{aligned} \phi^{(a,b)}(x) &= \sum_s \int \tilde{d}\mathbf{p} \left[\hat{a}_{\mathbf{p}}^s u_{\mathbf{p}}^s e^{-ipx} + \hat{b}_{\mathbf{p}}^{\dagger s} v_{\mathbf{p}}^s e^{ipx} \right]; \\ \phi^{\dagger(a,b)}(x) &= \sum_s \int \tilde{d}\mathbf{p} \left[\hat{b}_{\mathbf{p}}^s v_{\mathbf{p}}^{\dagger s} e^{-ipx} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger s} u_{\mathbf{p}}^{\dagger s} e^{ipx} \right]; \end{aligned} \quad (3.21)$$

le (3.21) sono la scrittura generale dei campi in termini degli operatori di creazione e distruzione: il $\tilde{d}\mathbf{p}$ indica la misura invariante (relativistico) della teoria di campo, $u_{\mathbf{p}}^s$, $v_{\mathbf{p}}^s$, $u_{\mathbf{p}}^{\dagger s}$ e $v_{\mathbf{p}}^{\dagger s}$ appartengono alla stessa rappresentazione del campo (sono pari ad 1 nel caso di campo scalare, sono gli spinori soluzione dell'equazione di Dirac nel sistema di riferimento in cui la particella è a riposo e che poi sono boostati nel caso di campi di Dirac, sono gli stati di polarizzazione nel caso di campi vettoriali o tensoriali, etc etc.). Le (3.21) possono essere invertite per ottenere la scrittura degli operatori di creazione e distruzione in termini dei campi, questa scrittura dipende dal campo in esame; tuttavia in generale potrà scriversi ad esempio

$$\hat{b}_{\mathbf{p}}^s = K \int d\mathbf{x} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \hat{\mathcal{D}}_1 \phi^{\dagger(a,b)}(x) \hat{\mathcal{D}}_2 v_{\mathbf{p}}^s,$$

in cui K tiene conto di fattori costanti e $\hat{\mathcal{D}}_1$ e $\hat{\mathcal{D}}_2$ possono essere, in generale, operatori differenziali (ad esempio nel caso del campo scalare \mathcal{D}_1 è l'operatore $\overset{\leftrightarrow}{\partial}_t$, $\mathcal{D}_2 = \mathbf{1}$ e $v_{\mathbf{p}}^s = 1$). Le formule (3.20) ci permettono di dire che gli sviluppi (3.21) e le scritture degli operatori di creazione e distruzione sono valide anche per gli stati asintotici e ci permettono di derivare formule asintotiche del tipo

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} K \int d\mathbf{x} \langle \alpha | e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \hat{\mathcal{D}}_1 \phi^{\dagger(a,b)}(x) \hat{\mathcal{D}}_2 v_{\mathbf{p}}^s | \beta \rangle &= \sqrt{Z} K \int d\mathbf{x} \langle \alpha | e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \hat{\mathcal{D}}_1 \phi_{in}^{\dagger(a,b)}(x) \hat{\mathcal{D}}_2 v_{\mathbf{p}}^s | \beta \rangle; \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} K \int d\mathbf{x} \langle \alpha | e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \hat{\mathcal{D}}_1 \phi^{\dagger(a,b)}(x) \hat{\mathcal{D}}_2 v_{\mathbf{p}}^s | \beta \rangle &= \sqrt{Z} K \int d\mathbf{x} \langle \alpha | e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \hat{\mathcal{D}}_1 \phi_{out}^{\dagger(a,b)}(x) \hat{\mathcal{D}}_2 v_{\mathbf{p}}^s | \beta \rangle, \end{aligned}$$

e analoghe per gli altri operatori di creazione e distruzione.

Consideriamo, ora, un elemento di matrice di scattering, $S_{\beta\alpha} = \langle \alpha, out, n | l, in, \beta \rangle$ in cui l e n indicano il numero di particelle nello stato iniziale e finale; possiamo estrarre dallo stato $|\beta\rangle$ una particella con impulso \mathbf{p}_1 scrivendo l'operatore di creazione corrispondente agente sullo stato privo di quella particella, ossia, ad esempio

$$\hat{b}_{in\mathbf{p}_1}^{\dagger s_1} |l-1, in, \beta\rangle = |l, in, \beta\rangle.$$

Supponendo che nello stato finale non ci siano particelle con lo stesso impulso \mathbf{p}_1 (stiamo supponendo che non ci sia scattering in avanti) abbiamo che $\langle \alpha, out, n | \hat{b}_{out\mathbf{p}_1}^{\dagger s_1} = 0$; per cui possiamo scrivere

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &= \langle \alpha, out, n | \hat{b}_{in\mathbf{p}_1}^{\dagger s_1} - \hat{b}_{out\mathbf{p}_1}^{\dagger s_1} | l-1, in, \beta \rangle = \\ &= K \int d\mathbf{x}_1 e^{-i\mathbf{p}_1 \mathbf{x}_1} \langle \alpha, out, n | v_{\mathbf{p}_1}^{\dagger s_1} \hat{\mathcal{D}}_2^{\dagger} \phi_{in}^{\dagger(a,b)}(x_1) \hat{\mathcal{D}}_1^{\dagger} - v_{\mathbf{p}_1}^{\dagger s_1} \hat{\mathcal{D}}_2^{\dagger} \phi_{out}^{\dagger(a,b)}(x_1) \hat{\mathcal{D}}_1^{\dagger} | l-1, in, \beta \rangle \\ &= \frac{K}{\sqrt{Z}} \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \right) \int d\mathbf{x}_1 e^{-i\mathbf{p}_1 \mathbf{x}_1} \langle \alpha, out, n | v_{\mathbf{p}_1}^{\dagger s_1} \hat{\mathcal{D}}_2^{\dagger} \phi^{\dagger(a,b)}(x_1) \hat{\mathcal{D}}_1^{\dagger} | l-1, in, \beta \rangle = \\ &= -\frac{K}{\sqrt{Z}} \int d\mathbf{x}_1 dt \partial_t (e^{-i\mathbf{p}_1 \mathbf{x}_1} \langle \alpha, out, n | v_{\mathbf{p}_1}^{\dagger s_1} \hat{\mathcal{D}}_2^{\dagger} \phi^{\dagger(a,b)}(x_1) \hat{\mathcal{D}}_1^{\dagger} | l-1, in, \beta \rangle). \end{aligned} \tag{3.22}$$

A questo punto si può svolgere la derivata temporale, massaggiando opportunamente il risultato ed integrando per parti si fa in modo di ottenere l'operatore $v_{\mathbf{p}_1}^{\dagger s_1} \hat{\mathcal{P}}^{\dagger}(x_1)$ applicato ad un elemento di matrice del tipo $\langle \alpha | \phi^{\dagger(a,b)}(x_1) | \beta \rangle$; nel caso scalare avremmo (usando $\partial_t^2 e^{-i\mathbf{p}_1 \mathbf{x}_1} = (\nabla^2 - m^2) e^{-i\mathbf{p}_1 \mathbf{x}_1}$ ed integrando per parti due volte per spostare il laplaciano dall'esponenziale all'elemento di matrice)

$$\begin{aligned} & -\frac{K}{\sqrt{Z}} \int d\mathbf{x}_1 dt \partial_t (e^{-i\mathbf{p}_1 \mathbf{x}_1} \partial_t^2 \langle \alpha | \phi(x_1) | \beta \rangle - \langle \alpha | \phi(x_1) | \beta \rangle \partial_t^2 e^{-i\mathbf{p}_1 \mathbf{x}_1}) = \\ & = -\frac{K}{\sqrt{Z}} \int d\mathbf{x}_1 dt \partial_t (e^{-i\mathbf{p}_1 \mathbf{x}_1} \partial_t^2 \langle \alpha | \phi(x_1) | \beta \rangle - \langle \alpha | \phi(x_1) | \beta \rangle (\nabla^2 - m^2) e^{-i\mathbf{p}_1 \mathbf{x}_1}) = \\ & = -\frac{K}{\sqrt{Z}} \int d\mathbf{x}_1 dt e^{-i\mathbf{p}_1 \mathbf{x}_1} (\partial_t^2 - \nabla^2 - m^2) \langle \alpha | \phi(x_1) | \beta \rangle = -\frac{K}{\sqrt{Z}} \int d\mathbf{x}_1 dt e^{-i\mathbf{p}_1 \mathbf{x}_1} (\square - m^2) \langle \alpha | \phi(x_1) | \beta \rangle. \end{aligned}$$

In generale avremo

$$S_{\beta\alpha} = -\frac{K}{\sqrt{Z}} \int d\mathbf{x}_1 dt e^{-ip_1 x_1} v_{\mathbf{p}_1}^{\dagger s_1} \hat{\mathcal{P}}^\dagger(x_1) \langle \alpha, out, n | \phi^{(a,b)}(x_1) | l-1, in, \beta \rangle. \quad (3.23)$$

Possiamo fare la stessa cosa per lo stato *out*,

$$\langle \alpha, out, n | \hat{b}_{out\mathbf{q}_1}^{\sigma_1} = \langle \alpha, out, n-1 |.$$

Consideriamo l'elemento di matrice nell'equazione (3.23) e supponendo che nello stato *in* non ci siano particelle con stesso impulso si ha

$$\begin{aligned} & \langle \alpha, out, n-1 | \hat{b}_{out\mathbf{q}_1}^{\sigma_1} \phi^{(a,b)}(x_1) - \phi^{(a,b)}(x_1) \hat{b}_{in\mathbf{q}_1}^{\sigma_1} | l-1, in, \beta \rangle = \\ & = K \int d\mathbf{y}_1 e^{iq_1 y_1} \langle \alpha, out, n-1 | (\hat{\mathcal{D}}_1 \phi_{out}^{\dagger(a,b)}(y_1) \hat{\mathcal{D}}_2 v_{\mathbf{q}_1}^{\sigma_1}) \phi^{(a,b)}(x_1) + \\ & - \phi^{(a,b)}(x_1) (\hat{\mathcal{D}}_1 \phi_{in}^{\dagger(a,b)}(y_1) \hat{\mathcal{D}}_2 v_{\mathbf{q}_1}^{\sigma_1}) | l-1, in, \beta \rangle \\ & = \frac{K}{\sqrt{Z}} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} - \lim_{t \rightarrow -\infty} \right) \int d\mathbf{y}_1 e^{iq_1 y_1} \langle \alpha, out, n-1 | \mathcal{T} [(\hat{\mathcal{D}}_1 \phi_{out}^{\dagger(a,b)}(y_1) \hat{\mathcal{D}}_2 v_{\mathbf{q}_1}^{\sigma_1}) \phi^{(a,b)}(x_1)] | l-1, in, \beta \rangle = \\ & = \frac{K}{\sqrt{Z}} \int d\mathbf{y}_1 dt \partial_t (e^{iq_1 y_1} \langle \alpha, out, n-1 | \mathcal{T} [(\hat{\mathcal{D}}_1 \phi_{out}^{\dagger(a,b)}(y_1) \hat{\mathcal{D}}_2 v_{\mathbf{q}_1}^{\sigma_1}) \phi^{(a,b)}(x_1)] | l-1, in, \beta \rangle); \end{aligned}$$

in cui è stato inserito il prodotto tempo ordinato perchè i limiti eliminano le parti del \mathcal{T} -prodotto che non servono. Anche qui, si svolge la derivata temporale, si massaggia opportunamente il risultato e si integra per parti e si fa in modo di ottenere l'operatore $\hat{\mathcal{P}}(y_1) v_{\mathbf{q}_1}^{\sigma_1}$ applicato ad un elemento di matrice del tipo $\langle \alpha | \phi^{\dagger(a,b)}(y_1) | \beta \rangle$ per poter scrivere

$$\begin{aligned} & \langle \alpha, out, n | \phi^{(a,b)}(x_1) | l-1, in, \beta \rangle = \\ & = \frac{K}{\sqrt{Z}} \int d\mathbf{y}_1 dt e^{iq_1 y_1} \hat{\mathcal{P}}(y_1) v_{\mathbf{p}_2}^{\sigma_1} \langle \alpha, out, n-1 | \mathcal{T} [\phi^{\dagger(a,b)}(y_1) \phi^{(a,b)}(x_1)] | l-1, in, \beta \rangle; \end{aligned} \quad (3.24)$$

Iterando più e più volte il procedimento possiamo ridurre l'elemento di matrice iniziale della forma $\langle \alpha, out, n | l, in, \beta \rangle$ in qualcosa di proporzionale al prodotto tempo ordinato di campi sul vuoto (ricordiamo che il vuoto degli stati *in* e il vuoto degli stati *out* è equivalente al vuoto degli stati liberi) e quindi ai propagatori

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} & = \langle \alpha, out, n | l, in, \beta \rangle = \\ & = \left(\prod_{j=1}^n \int d^4 y_j \frac{K}{\sqrt{Z}} e^{iq_j y_j} \hat{\mathcal{P}}(y_j) v_{\mathbf{q}_j}^{\sigma_j} \right) \left(\prod_{k=1}^l \left(- \int d^4 x_k \frac{K}{\sqrt{Z}} e^{-ip_k x_k} v_{\mathbf{p}_k}^{\dagger s_k} \hat{\mathcal{P}}^\dagger(x_k) \right) \right) \times \\ & \times \langle 0 | \mathcal{T} [\phi^{\dagger(a,b)}(y_1) \dots \phi^{\dagger(a,b)}(y_n) \phi^{(a,b)}(x_1) \dots \phi^{(a,b)}(x_l)] | 0 \rangle = \\ & = \left(\prod_{j=1}^n \int d^4 y_j \frac{K}{\sqrt{Z}} e^{iq_j y_j} \hat{\mathcal{P}}(y_j) v_{\mathbf{q}_j}^{\sigma_j} \right) \left(\prod_{k=1}^l \left(- \int d^4 x_k \frac{K}{\sqrt{Z}} e^{-ip_k x_k} v_{\mathbf{p}_k}^{\dagger s_k} \hat{\mathcal{P}}^\dagger(x_k) \right) \right) G(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_l). \end{aligned} \quad (3.25)$$

La (3.25) vale nel caso di particelle di tipo *b* (convenzionalmente, antiparticelle); se si vuole il caso di particelle di tipo *a* (convenzionalmente, particelle) bisogna sostituire i $v_{\mathbf{p}}^s$ con $u_{\mathbf{p}}^s$ (e ovviamente anche i loro dagati), nel prodotto tempo ordinato bisogna sostituire i campi dagati con quelli non dagati e viceversa e bisogna scambiare le due produttorie (ossia ogni particella nello stato finale contribuisce con un termine (—

$\int d^4x_k \frac{K}{\sqrt{Z}} e^{-ip_k x_k} v_{\mathbf{p}_k}^{\dagger s_k} \hat{\mathcal{P}}^\dagger(x_k)$) mentre ogni particella nello stato iniziale con un termine $\int d^4y_j \frac{K}{\sqrt{Z}} e^{iq_j y_j} \hat{\mathcal{P}}(y_j) v_{\mathbf{q}_j}^{\sigma_j}$. La (3.25) si può riscrivere considerando la trasformata di Fourier del propagatore

$$\tilde{G}(q_1, \dots, q_n, -p_1, \dots, -p_l) = \left(\prod_{j=1}^n \int d^4y_j e^{iq_j y_j} \right) \left(\prod_{k=1}^l \int d^4x_k e^{-ip_k x_k} \right) G(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_l);$$

nello spazio degli impulsi le formule LSZ sono

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &= \langle \alpha, out, n | l, in, \beta \rangle = \\ &= \left(\prod_{k=1}^l \left(-\frac{K}{\sqrt{Z}} v_{\mathbf{p}_k}^{\dagger s_k} \tilde{\mathcal{P}}^\dagger(p_k) \right) \right) \left(\prod_{j=1}^n \left(\frac{K}{\sqrt{Z}} \tilde{\mathcal{P}}(q_j) v_{\mathbf{q}_j}^{\sigma_j} \right) \right) \tilde{G}(q_1, \dots, q_n, -p_1, \dots, -p_l). \end{aligned} \quad (3.26)$$

In conclusione, le formule LSZ ci dicono due cose importanti: gli elementi della matrice di scattering sono calcolabili a partire dai propagatori e nello specifico sono, a parte fattori costanti, il residuo dei poli dei propagatori nello spazio degli impulsi.

Nel caso in cui le particelle appartengano a campi differenti, ognuna avrà una sua costante di rinormalizzazione, le costanti numeriche K saranno differenti per ogni campo differente, le masse fisiche in corrispondenza dei poli potranno essere, in generale, diverse e gli operatori cinetici, ovviamente differenti da campo a campo.

Essendo le particelle negli stati finale ed iniziale esse sono reali e quindi on shell; per cui le formule di riduzione sono sempre nulle tranne quando i poli del propagatore cancellano esattamente le quantità che renderebbero tutto nullo. Ci occuperemo di questo nel prossimo paragrafo.

3.3.2 Diagrammi di Feynman per la matrice di scattering

Dalla formula di riduzione LSZ possiamo derivare le regole di Feynman per la matrice di scattering direttamente dalle regole per i propagatori. Definiamo, prima di tutto, un nuovo tipo di diagramma, i diagrammi irriducibili ad una particella (1-particle irriducibile o 1PI): un diagramma è detto 1PI se non può essere diviso in più diagrammi contenenti un'interazione eliminando una linea (in modo equivalente "tagliando" un propagatore a due punti). Alcuni esempi sono riportati nella figura sottostante.

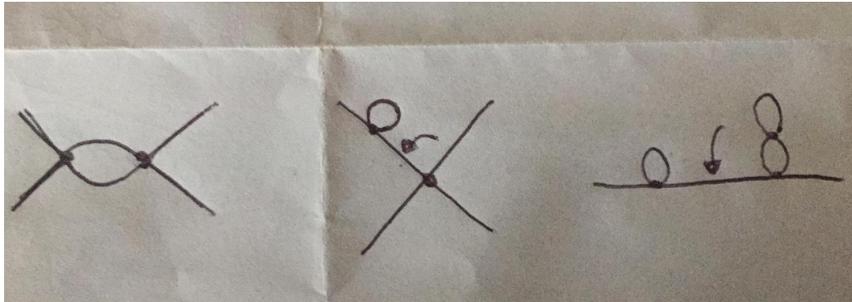


Figura 3.1: *Diagrammi di Feynman; il primo da sinistra è 1PI mentre i due successivi sono riducibili tagliando le linee indicate dalle frecce.*

Dato che l'ampiezza totale di un diagramma è data dal prodotto delle sue diverse componenti, possiamo rappresentare schematicamente tutti i grafici connessi con un singolo diagramma a blocchi in cui nelle linee esterne abbiamo propagatori a due punti esatti (che quindi si scrivono come somma infinita di prodotti di propagatori liberi a due punti) mentre il blocco centrale è un diagramma 1PI sulle linee esterne ossia è un diagramma amputato. Nella figura sottostante abbiamo un esempio di grafico a blocchi dalla teoria $\lambda\phi^4$.

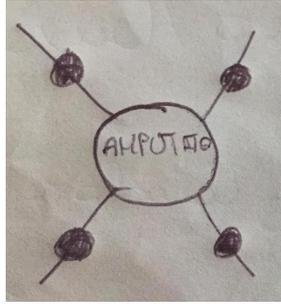


Figura 3.2: Diagrammi di Feynman a blocchi della funzione di Green a 4 punti; il blocco centrale è 1PI sulle linee esterne mentre i pallini scuri indicano i propagatori a due punti esatti.

Soffermiamoci sulla teoria $\lambda\phi^4$, anche se le nostre conclusioni continuano ad essere valide in generale. Indicando con $-i\mathcal{M}^2(p^2)$ la somma delle ampiezze di tutti i diagrammi del tipo 1PI e ricordando che il propagatore esatto è dato dalla somma dei soli diagrammi connessi, possiamo scrivere il propagatore esatto come

$$\begin{aligned}
 \text{Prop. esatto} &= \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i\mathcal{M}^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i\mathcal{M}^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i\mathcal{M}^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots \\
 &= \frac{i}{p^2 - m_0^2} \left[1 + (-i\mathcal{M}^2) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + (-i\mathcal{M}^2)^2 \frac{i}{p^2 - m_0^2} \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots \right] = \\
 &= \frac{i}{p^2 - m_0^2} \frac{1}{1 - \frac{\mathcal{M}^2}{p^2 - m_0^2}} = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \mathcal{M}^2},
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

in cui si è sommata la serie geometrica; una rappresentazione pittorica del conto svolto è riportata dalla Figura (3.3).

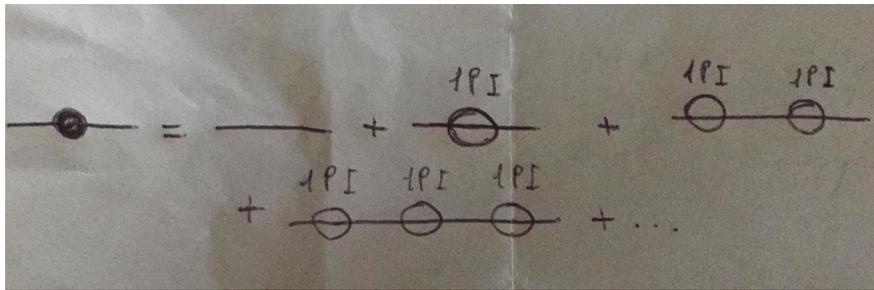


Figura 3.3: Diagrammi di Feynman che rappresentano lo sviluppo della funzione di Green a due punti esatta in termini di diagrammi 1PI. La somma può essere determinata notando che si tratta di una serie geometrica.

Riprendendo la rappresentazione di Källén-Lehmann (equazione (2.5)) possiamo scrivere la trasformata di Fourier del propagatore a due punti nella forma

$$\tilde{G}(x_1, x_2) = \frac{iZ(m^2)}{p^2 - m^2} + i \int_{M_s}^{\infty} dM^2 \frac{\sigma(M^2)}{p^2 - M^2}$$

in cui il secondo addendo del lato destro è regolare nel limite in cui la particella viene messa on shell; in questo limite confrontando la (3.27) con la rappresentazione di Källén-Lehmann troviamo che

$$\frac{i}{p^2 - m_0^2 - \mathcal{M}^2} = \frac{iZ(m^2)}{p^2 - m^2} + (\text{termine regolare})$$

e quindi ogni funzione di Green esatta a due punti contribuisce, in diagrammi del tipo di quello in Figura 3.3, con un polo semplice.

Consideriamo un elemento di matrice S con l particelle entranti (con momenti $-p_1, \dots, -p_l$) e n uscenti (con momenti q_1, \dots, q_n); il propagatore esatto a $n + l$ punti sarà, come nel caso della Figura 3.3 per il propagatore a 4 punti, a blocchi e composto da un blocco centrale 1PI sulle linee esterne e $n + l$ linee esterne contenenti propagatori a due punti esatti. Ognuna delle $n + l$ linee esterne concorrerà con un polo semplice posto in corrispondenza della massa fisica della particella associata e quindi, la totalità delle linee esterne, produrrà una produttoria di poli posti rispettivamente in corrispondenza della massa fisica delle particelle associate. Questo vuol dire che nelle formule di riduzione (formule (3.26) nel caso di campo scalare) il termine $\tilde{G}(q_1, \dots, q_n, -p_1, \dots, -p_l)$ si scriverà come

$$\tilde{G}(q_1, \dots, q_n, -p_1, \dots, -p_l) = \left(\prod_{k=1}^l \frac{iZ}{p_k^2 - m^2} \right) \left(\prod_{j=1}^n \frac{iZ}{q_j^2 - m^2} \right) \times \text{''diagramma amputato centrale''};$$

per cui otteniamo

$$S_{\beta\alpha} = \left(\prod_{k=1}^l \left(-iK\sqrt{Z} \right) \right) \left(\prod_{j=1}^n \left(-iK\sqrt{Z} \right) \right) \times \text{''diagramma amputato centrale''}, \quad (3.28)$$

in cui, in questo caso per la teoria scalare neutra si ha $K = \frac{i}{\sqrt{(2\pi)^3 2E}}$.

Nel caso in cui le particelle appartengano a campi differenti, ognuna avrà una sua costante di rinormalizzazione, le costanti numeriche K' saranno differenti per ogni campo differente e le masse fisiche in corrispondenza dei poli potranno essere, in generale, diverse.

Capitolo 4

Campo elettromagnetico e sua quantizzazione

Il campo elettromagnetico (EM) è stata la prima teoria a contenere una simmetria di gauge; in elettromagnetismo classico i campi elettrico e magnetico sono descritti dal potenziale scalare e dal potenziale vettore, se questi vengono modificati aggiungendo la derivata temporale di una funzione arbitraria (sufficientemente regolare) al potenziale scalare e il gradiente (della stessa funzione) al potenziale vettore le equazioni dell'elettromagnetismo non cambiano. Questo vuol dire che le equazioni di Maxwell fissano la soluzione a meno di trasformazioni di gauge.

In questa sezione partendo dalla densità di lagrangiana del campo EM tratteremo il problema di fissare la gauge, studieremo il propagatore del campo fotonico e ci occuperemo della sua quantizzazione mantenendo manifesta l'invarianza di Lorentz. Inoltre introdurremo il metodo di Faddeev-Popov per ovviare ai problemi di convergenza dell'integrale funzionale nelle teorie di gauge; un metodo che esprime al meglio tutta la propria potenza nelle teorie di gauge non abeliane e che, in queste, predice la comparsa di campi ghost che violano il teorema di spin-statistica.

4.1 Scelta di gauge, funzionale generatore e propagatore fotonico

Cominciamo con il ricordare la forma della densità di lagrangiana di Maxwell

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu};$$

da questa si derivano le equazioni di Maxwell per il campo EM libero. Come già detto nell'introduzione del capitolo, il campo EM possiede una simmetria di gauge: operando una trasformazione del quadripotenziale del tipo (in cui $\alpha(x)$ è una funzione arbitraria sufficientemente regolare)

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x) \quad (4.1)$$

la densità di lagrangiana di Maxwell e quindi le equazioni del moto risultano inalterate. In generale, una trasformazione di gauge non deve avere alcun effetto sulla fisica e quindi i risultati fisici devono essere gli stessi in tutte le gauge; l'invarianza di gauge è fondamentale perchè in una teoria di gauge (ossia una teoria che si fonda sull'esistenza di un gruppo di simmetria della teoria stessa) l'invarianza sotto gruppi di trasformazioni delinea le possibili interazioni e quindi la fisica.

4.1.1 Scelta di gauge e metodo di Faddeev-Popov

Come sappiamo, i propagatori si scrivono come rapporto tra integrali funzionali; nell'applicare l'armamentario degli integrali sui cammini alle teorie di gauge, sorge in imprevisto che comporta la non convergenza dell'integrale. La forma tipica dell'integrale funzionale con cui avremo a che fare nella teoria dei campo EM è

$$I = \int D[A_\mu(x)] O(A_\mu(x)) e^{iS[A_\mu(x)]},$$

in cui $O(A^\mu(x))$ è un funzionale gauge-invariante e l'integrale è esteso a tutti i "cammini" $A^\mu(x)$ periodici tra i tempi $t = \pm\infty$; nello specifico la forma del funzionale generatore da cui estrarremo i propagatori è

$$Z[\mathbf{J}] = \int D[A_\mu(x)] e^{iS[A_\mu(x)] - i \int d^4x J^\mu A_\mu(x)}$$

Nel valutare l'integrale funzionale e il funzionale generatore abbiamo un certo numero di cammini fisicamente distinti ma ognuno di essi è equivalente, data l'invarianza di gauge del campo EM, ad una infinità di cammini legati da trasformazioni di gauge (detti orbite o traiettorie di gauge) che danno lo stesso contributo all'integrale funzionale, il che comporta la divergenza dell'integrale sui cammini e del funzionale generatore; dobbiamo quindi capire come soprassedere a questa divergenza. L'idea è distinguere i cammini fisicamente diversi da quelli legati da trasformazioni di gauge; ossia definire un sistema di coordinate nello spazio dei cammini, tale che una parte di queste coordinate descrivano i cammini fisicamente distinti e le altre i cammini legati da una trasformazione di gauge; con questo espediente vogliamo ridurre l'integrazione funzionale solo ai cammini fisicamente distinti (che sono numerabili) così da poter avere la convergenza cercata. Il metodo generale per fare questo è stato sviluppato da Faddeev e Popov che svilupperemo in maniera abbastanza generale e che poi applicheremo al caso del campo EM.

Consideriamo dei campi di gauge $A_\mu^B(x)$ e una matrice unitaria $\hat{U}(x)$ che sia la rappresentazione di un gruppo G , ad esempio nel caso del gruppo di gauge $U(1)$ si ha $\hat{U}(x) = e^{i1\alpha(x)}$; una trasformazione di gauge per un gruppo di Lie G è data da

$$A_\mu^U(x) = \hat{U}(x)A_\mu(x)\hat{U}^\dagger(x) - i\hat{U}(x)\partial_\mu\hat{U}^\dagger(x), \quad (4.2)$$

che nel caso del gruppo $U(1)$ si riduce proprio alla trasformazione (4.1). Come già detto, al fine di evitare le divergenze, dobbiamo imporre restrizioni sulla somma dei cammini in modo tale che i cammini che sono

collegati tramite una trasformazione di gauge siano contati esattamente una volta. Per fare ciò dobbiamo trovare un modo per classificare i potenziali vettoriali in classi. Lo faremo definendo le condizioni di gauge fixing. Ogni classe è etichettata da una configurazione rappresentativa e altri elementi nella classe sono correlati ad essa da trasformazioni di gauge regolari; dobbiamo scegliere queste condizioni di gauge fixing richiedendo che la teoria resti manifestamente invariante di Lorentz.

Da qui in avanti omettiamo la dipendenza da x , ma va sempre ricordato che essa è presente. Definiamo la funzione liscia $f^B(A_\mu^B)$ (in cui B è l'indice non abeliano che è pari ad 1 nel caso di $U(1)$, 1,2,3 nel caso di $SU(2)$ ed, in generale va da 1 al numero di generatori del gruppo) che fissa la gauge per tutte le componenti del campo; imporre la gauge fixing si traduce nell'integrare solo su di una determinata classe e per farlo inseriamo una delta sotto forma di unità (nello spazio delle classi di gauge)

$$1 = \Delta[A_\mu] \int DU \delta(f^B(A_\mu^U)) \quad (4.3)$$

in cui deve essere $\Delta[A_\mu(x)]^{-1} = \int DU \delta(f^B(A_\mu^U))$ e DU (detta misura di Haar) è la misura di integrazione su una classe di trasformazioni di gauge. Notiamo che $\Delta[A_\mu]^{-1}$ è invariante sotto trasformazioni di gauge

$$\Delta[A_\mu^{U'}]^{-1} = \int DU \delta(f^B(A_\mu^{U'U})) = \int DU'' \delta(f^B(A_\mu^{U''})) = \Delta[A_\mu]^{-1},$$

in cui $U'' = U'U$ e si è sfruttata l'invarianza della misura di integrazione sotto trasformazioni di gauge; quindi $\Delta[A_\mu]^{-1}$ è una funzione della classe di gauge fissata dalla gauge fixing e non del campo di gauge A_μ^B . Inserendo la (4.3) nel funzionale generatore abbiamo

$$\begin{aligned} Z[\mathbf{J}] &= \int D[A_\mu] e^{iS[A_\mu] - i \int d^4x J^\mu A_\mu} = \int \int D[A_\mu] \Delta[A_\mu] DU \delta(f^B(A_\mu^U)) e^{iS[A_\mu] - i \int d^4x J^\mu A_\mu} = \\ &= \int \int DUD[A_\mu^V] \Delta[A_\mu^V] \delta(f^B(A_\mu^{VU})) e^{iS[A_\mu^V] - i \int d^4x J^\mu A_\mu^V} = \\ &= \int DU \int D[A_\mu] \Delta[A_\mu] \delta(f^B(A_\mu)) e^{iS[A_\mu] - i \int d^4x J^\mu A_\mu} \end{aligned} \quad (4.4)$$

in cui nel terzo passaggio abbiamo cambiato variabili tramite una generica trasformazione di gauge $\hat{V}(x)$, nel quarto abbiamo posto $\hat{V}(x) = \hat{U}(x)^{-1}$ e sfruttato il fatto che la misura, l'esponente e il funzionale $\delta[A_\mu]$ sono invarianti di gauge. Il risultato finale è che, nel valutare gli integrali funzionali per una teoria di gauge, è possibile perseguire l'idea iniziale di restringere l'integrazione fissando la gauge e il termine divergente si fattorizza (il termine divergente è dato dall'integrale sulla misura di Haar che tiene conto di tutti i cammini legati da un trasformazione di gauge); il prezzo da pagare nel farlo sono la funzione di gauge fixing $\delta(f^B(A_\mu^B))$ e il funzionale $\Delta[A_\mu]$ che ora andremo a discutere.

Torniamo alla (4.3), e notiamo che

$$\Delta[A_\mu(x)]^{-1} = \int DU \delta(f^B(A_\mu^U)) \Rightarrow \Delta[A_\mu(x)]^{-1} = \int Df^B \det\left(\frac{\delta U}{\delta f^B}\right) \delta(f^B) = \det\left(\frac{\delta U}{\delta f^B}\right) \Big|_{f^B=0}$$

in cui abbiamo fatto un cambio di variabili passando dalle variabili della trasformazione di gauge alla funzione che fissa le coordinate sulle traiettorie di gauge. In conclusione

$$\Delta[A_\mu(x)] = \det\left(\frac{\delta f^B}{\delta U}\right) \Big|_{f^B=0} = \det\left(\frac{\delta f^B(A_\mu(x))}{\delta \alpha^A(y)}\right) \Big|_{f^B=0}, \quad (4.5)$$

queste conclusioni (formule (4.4) e (4.5)) sono valide per tutte le teorie di gauge che possiedono un gruppo di gauge compatto; il determinante funzionale della (4.5) è detto determinante di Faddeev-Popov. Il cambio

di variabili fatto per ottenere il determinante di Faddeev-Popov è valido solo se la relazione tra la funzione f^B e le variabili della trasformazione di gauge (in sostanza i parametri del gruppo di gauge) è univoca; se questa univocità viene meno si parla di coppie di Gribov.

Torniamo al funzionale generatore (4.4) e rilassiamo la condizione imposta dalla delta di Dirac sostituendola con una gaussiana normalizzata della forma $N e^{-\frac{i}{2\xi} \int d^4x (f^B(A_\mu))^2}$ (nel limite $\xi \rightarrow 0$ otteniamo la delta)

$$Z[\mathbf{J}] = \int DU \int D[A_\mu] \Delta[A_\mu] N e^{-\frac{i}{2\xi} \int d^4x (f^B(A_\mu))^2} e^{iS[A_\mu] - i \int d^4x J^\mu A_\mu} =$$

$$N' \int D[A_\mu] \Delta[A_\mu] e^{iS[A_\mu] - i \int d^4x J^\mu A_\mu - \frac{i}{2\xi} \int d^4x (f^B(A_\mu))^2},$$

in cui abbiamo inglobato il fattore costante dovuto alla misura di Haar assieme alla costante di normalizzazione della gaussiana in N' ; è interessante notare (anche se non verrà trattato qui) che il determinante di Faddeev-Popov può scriversi come un integrale sui cammini, il che comporta l'aggiunta di un pezzo all'esponente. Poichè l'esponente del funzionale generatore (a meno della parte dipendente da J_μ) è l'azione del campo in esame, possiamo scrivere l'azione e la densità di lagrangiana di un generico campo di gauge non interagente

$$S[A_\mu]_{TOT,\xi} = \int d^4x \left(\mathcal{L}_{gauge} - \frac{1}{2\xi} (f^B(A_\mu))^2 + \mathcal{L}_{ghost} \right) \quad (4.6)$$

in cui \mathcal{L}_{gauge} è l'analogo per campi di gauge generici (più raffinato) della lagrangiana di Maxwell per il campo EM e \mathcal{L}_{ghost} è il termine aggiunto dalla riscrittura come integrale sui cammini del determinante funzionale di Faddeev-Popov (e descrive particelle con statistica errata chiamate ghost di Faddeev-Popov) mentre il termine $-\frac{1}{2\xi} (f^B(A_\mu))^2$ è la gauge fixing.

Torniamo al caso del campo EM e imponiamo la gauge di Lorenz, ossia $f(A_\mu) = \partial^\mu A_\mu$ (dato che vogliamo manifesta l'invarianza di Lorentz della teoria) e calcoliamo il determinante (4.5) (ricordando che gli operatori δ e ∂^μ commutano)

$$\Delta[A_\mu(x)] = \det \left(\frac{\delta(\partial^\mu A_\mu)}{\delta\alpha(y)} \right) = \det \left(\frac{\partial^\mu(A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x) - A_\mu(x))}{\delta\alpha(y)} \right) = \det \left(\frac{\square\alpha(x)}{\delta\alpha(y)} \right) = \det(\square),$$

che risulta indipendente dai campi; è possibile, quindi, portare fuori dal funzionale generatore il determinante di Faddeev-Popov e, nel caso di teorie abeliane nella gauge di Lorenz, il determinante scompare e la teoria è libera dai ghost.

4.1.2 Funzionale generatore e propagatore fotonico

L'azione (4.6), nel caso del campo EM con gauge fixing rilassata rispetto alla gauge di Lorenz si scrive

$$S[A_\mu] = \int d^4x \mathcal{L}_\xi = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right) = \int d^4x \frac{1}{2} A_\mu P^{\mu\nu} A_\nu, \quad (4.7)$$

in cui nell'ultimo passaggio si è integrato per parti e $P^{\mu\nu} := \eta^{\mu\nu} \square + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) \partial^\mu \partial^\nu$ è l'operatore fotonico; il parametro ξ classifica le gauge. Inserendo la (4.7) nel funzionale generatore possiamo calcolare i propagatori

del campo fotonico

$$\begin{aligned}
\langle 0|\mathcal{T}[A_\mu(x_1), \dots, A_\mu(x_n)]|0\rangle &= \frac{i^n}{Z[\mathbf{0}]} \left(\frac{\delta}{\delta J_\mu(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J_\mu(x_n)} \right) Z[\mathbf{J}] = \\
&= \frac{i^n}{Z[\mathbf{0}]} \left(\frac{\delta}{\delta J_\mu(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J_\mu(x_n)} \right) Ndet(\square) \int DU \int D[A_\mu] e^{iS[A_\mu] - i \int d^4x J^\mu A_\mu} = \\
&= \frac{i^n}{Z[\mathbf{0}]} \left(\frac{\delta}{\delta J_\mu(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J_\mu(x_n)} \right) Ndet(\square) \int DU \int D[A_\mu] e^{i \int d^4x \frac{1}{2} A_\mu P^{\mu\nu} A_\nu - i \int d^4x J^\mu A_\mu} = \\
&= \frac{i^n}{Z[\mathbf{0}]} \left(\frac{\delta}{\delta J_\mu(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J_\mu(x_n)} \right) Ndet(\square) \int DU \int D[A_\mu] e^{-\frac{i}{2} \int d^4x A_\mu P^{\mu\nu} A_\nu + 2 \int d^4x J^\mu A_\mu};
\end{aligned}$$

con passaggi analoghi a quanto fatto per il campo scalare si mostra che il funzionale generatore si scrive come una costante K (dovuta alla residua integrazione funzionale che non dipende dalle sorgenti) e un termine esponenziale dipendente dalle sorgenti; in definitiva abbiamo che

$$\begin{aligned}
\langle 0|\mathcal{T}[A_\mu(x_1), \dots, A_\mu(x_n)]|0\rangle &= i^n \left(\frac{\delta}{\delta J_\mu(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J_\mu(x_n)} \right) \frac{KNdet(\square) \int DU e^{-\frac{i}{2} \int d^4x [J_\mu (P^{\mu\nu})^{-1} J_\nu]} }{KNdet(\square) \int DU} = \\
&= i^n \left(\frac{\delta}{\delta J_\mu(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J_\mu(x_n)} \right) e^{-\frac{i}{2} \int d^4x [J_\mu (P^{\mu\nu})^{-1} J_\nu]},
\end{aligned} \tag{4.8}$$

e come volevamo sia la misura di Haar che il determinante di Faddeev-Popov si elidono. L'operatore $(P^{\mu\nu})^{-1}$ è l'operatore integrale il cui nucleo è l'inverso dell'operatore cinetico, quindi è il propagatore a due punti; calcoliamolo esplicitamente nella generica gauge. Passando allo spazio di Fourier in cui la relazione operatoriale tra $(P^{\mu\nu})^{-1}$ e $P^{\mu\nu}$ si semplifica da una integro-differenziale alla relazione algebrica $\tilde{P}^{\mu\nu}(\tilde{P}_{\nu\rho})^{-1} = \delta_\rho^\mu$ in cui (per confronto tensoriale) si cerca il propagatore nella forma $(\tilde{P}_{\nu\rho})^{-1} = c_1\eta_{\nu\rho} + c_2p_\nu p_\rho$

$$\begin{aligned}
\tilde{P}^{\mu\nu}(\tilde{P}_{\nu\rho})^{-1} = \delta_\rho^\mu &\Rightarrow \left(-\eta^{\mu\nu}p^2 - \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) p^\mu p^\nu \right) \left(c_1\eta_{\nu\rho} + c_2p_\nu p_\rho \right) = \\
&= -c_1p^2\delta_\rho^\mu - c_2p^2p^\mu p_\rho - c_1 \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) p^\mu p_\rho - c_2p^2 \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) p^\mu p_\rho = \\
&= -c_1p^2\delta_\rho^\mu + p^\mu p_\rho \left[-c_1 \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) - c_2 \frac{p^2}{\xi} \right] = \delta_\rho^\mu \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{p^2}, \quad c_2 = \frac{1-\xi}{p^4};
\end{aligned}$$

se sostituiamo i parametri trovati nella forma cercata del propagatore, otteniamo

$$(\tilde{P}_{\nu\rho})^{-1} = -\frac{1}{p^2}\eta_{\nu\rho} - \frac{(\xi-1)}{p^4}p_\nu p_\rho = -\frac{1}{p^2} \left[\eta_{\nu\rho} + \frac{\xi-1}{p^2}p_\nu p_\rho \right]. \tag{4.9}$$

È importante notare che il propagatore (4.9) ha un polo in $p^2 = 0$ indipendentemente dalla gauge che scegliamo; stiamo parlando di un campo i cui quanti sono particelle prive di massa, i fotoni. Per rendere matematicamente sensato l'operatore (4.9) ricordiamo che bisogna aggiungere una piccola parte immaginaria, analogamente a quanto si fa per il campo scalare; ossia

$$\begin{aligned}
(\tilde{P}_{\nu\rho})^{-1} &= -\frac{1}{p^2 - i\epsilon} \left[\eta_{\nu\rho} + \frac{\xi-1}{p^2}p_\nu p_\rho \right] \Rightarrow (P_{\nu\rho})^{-1} = \Delta_\xi(x-y) = \\
&= -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{1}{p^2 + i\epsilon} \left[\eta_{\nu\rho} + \frac{\xi-1}{p^2}p_\nu p_\rho \right].
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Scegliendo il parametro della gauge $\xi = 1$ riotteniamo il propagatore di Feynman per il campo fotonico $\Delta_{F, fotone}(x-y, 0) = -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{\eta_{\nu\rho}}{p^2 + i\epsilon}$ mentre per $\xi = 0$ otteniamo il propagatore nella gauge di Lorenz

(che in teoria dei campi è detta gauge di Landau); come notato in precedenza entrambi possiedono in polo in $p^2 = 0$ dato che quando inseriamo il propagatore tra correnti elettromagnetiche il termine dipendente dalla gauge è irrilevante per via della conservazione della corrente di Noether ($\partial_\mu j^\mu = 0$ che nello spazio degli impulsi equivale a $p_\mu j^\mu = 0$).

4.2 Quantizzazione covariante alla Gupta-Bleuler

Nonostante abbiamo già ottenuto molto di quello che cercavamo dalla quantizzazione del campo EM nelle sezioni precedenti, è interessante studiare la procedura di quantizzazione di Gupta-Bleuler; ossia la quantizzazione canonica del campo EM nella gauge covariante di Lorentz.

La procedura di quantizzazione canonica consiste, come sappiamo, nell'imporre le regole di commutazione tra il campo e i momenti coniugati a tempi uguali; nel caso relativistico abbiamo (il primo membro è un tensore a due indici per cui deve esserlo anche il secondo)

$$[A^\mu(t, \mathbf{x}), P^\nu(t, \mathbf{y})] = i\eta^{\mu\nu}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \quad (4.11)$$

a questo punto, consideriamo la densità di lagrangiana di Maxwell

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EM} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = \\ &= -\frac{1}{4}(\partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu) = -\frac{1}{4}(2(\partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu) - 2(\partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu)) = \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu) \end{aligned}$$

e calcoliamo i momenti coniugati alle componenti del campo A^μ

$$P^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -\frac{1}{2}(\delta_\nu^0 \partial^\nu A^\mu - \delta_\nu^0 \partial^\mu A^\nu) = \frac{1}{2}(\partial^\mu A^0 - \partial^0 A^\mu)$$

come si vede la componente P^0 è identicamente nulla e questo contraddice la possibilità di imporre i commutatori (4.11). Per proseguire aggiungiamo un termine, come fosse un moltiplicatore di Lagrangia, e che ci permetta di definire i commutatori; questo termine è detto di gauge fixing e noi fisseremo la gauge di Lorenz:

$$\mathcal{L}_{EM}^{fixed} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu) - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (4.12)$$

Notiamo che la (4.12) sembra descrivere una teoria diversa dal campo EM, essa non è più gauge invariante. L'idea è quella di quantizzare partendo dalla (4.12) per poi ritrovare la teoria del campo EM restringendo lo spazio degli stati e definendo quelli che saranno gli stati fisici.

Calcoliamo nuovamente gli impulsi coniugati

$$P^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}^{fixed}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -\frac{1}{2}(\delta_\nu^0 \partial^\nu A^\mu - \delta_\nu^0 \partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A^\mu) = \frac{1}{2}(\partial^\mu A^0 - \partial^0 A^\mu) - (\partial_\nu A^\nu)\delta_\mu^0,$$

in questo caso la componente $P^0(x)$ non è identicamente nulla. Dalla lagrangiana (4.12) si ottengono le equazioni del moto nella forma $\square A_\mu = 0$ e se espandiamo il campo A_μ nei suoi modi normali

$$A_\mu(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{i=0}^3 (\epsilon_\mu(\mathbf{p}, i) \hat{a}_{\mathbf{p},i} e^{-ipx} + \epsilon_\mu^*(\mathbf{p}, i) \hat{a}_{\mathbf{p},i}^\dagger e^{ipx})$$

otteniamo (sostituendo l'espansione nelle equazioni del moto) che deve essere $p^2 = 0$ e quindi particelle a massa nulla. Tuttavia non abbiamo restrizioni sulle polarizzazioni (specificate dagli $\epsilon(\mathbf{p}, i)$) ma, in ogni caso, sappiamo che due di questi (con scelta opportuna del sistema di base) saranno trasversi mentre i rimanenti no; questo deriva direttamente dal fatto che il quadrimpulso deve essere di tipo luce. Le relazioni di commutazione (4.11) ci forniscono anche i commutatori tra gli operatori di creazione e distruzione (che potrebbero essere dedotte anche generalizzando il caso dell'oscillatore bosonico ricordando che, come sappiamo, il campo EM ammette limite classico e quindi è un campo bosonico)

$$[\hat{a}_{\mathbf{p},i}, \hat{a}_{\mathbf{q},j}^\dagger] = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})\eta_{ij}, \quad (4.13)$$

dalle (4.13) è immediato notare che uno stato creato dall'operatore $\hat{a}_{\mathbf{p},i=0}^\dagger$ agente sul vuoto ha norma negativa (date le proprietà del tensore di Minkowski)

$$\begin{aligned} \langle i, \mathbf{p} | \mathbf{p}, i \rangle &= \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p},i} \hat{a}_{\mathbf{p},i}^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p},i} \hat{a}_{\mathbf{p},i}^\dagger | 0 \rangle - \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p},i}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p},i} | 0 \rangle = \langle 0 | [\hat{a}_{\mathbf{p},i}, \hat{a}_{\mathbf{p},i}^\dagger] | 0 \rangle = \eta_{ii} \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \Rightarrow \\ \langle 0, \mathbf{p} | \mathbf{p}, 0 \rangle &= \eta_{00} \delta^{(3)}(\mathbf{0}) < 0, \end{aligned}$$

ovviamente questo non ha alcun senso dato che il prodotto interno in meccanica quantistica è legato alla probabilità. Dobbiamo ora ricordare che la teoria che abbiamo quantizzato finora non è l'elettrodinamica, a causa del termine di gauge fixing nella densità di lagrangiana; operiamo quindi la restrizione sullo spazio di Fock (alcuni cenni allo spazio di Fock si trovano in **Appendice A**) per recuperare la teoria del campo EM. Definiamo quindi un sottospazio dello spazi di Fock composto dagli stati fisici e richiediamo che sugli stati fisici (ossia su quel sottospazio che contiene le particelle fisiche del campo EM) valga la condizione di gauge di Lorenz

$$\langle \text{fisici} | \partial^\mu A_\mu | \text{fisici} \rangle = 0;$$

va notato che la condizione di gauge $\partial^\mu A_\mu = 0$ non è imposta direttamente all'inizio della trattazione ma viene ritrovata come condizione operatoriale sullo spazio di Fock. Calcolando il termine $\partial^\mu A_\mu$ ci rendiamo conto che è composto dalla somma di due termini che sono uno il dagger dell'altro

$$\begin{aligned} \partial^\mu A_\mu &= -i \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{i=0}^3 p^\mu \epsilon_\mu(\mathbf{p}, i) \hat{a}_{\mathbf{p},i} e^{-ipx} + i \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{i=0}^3 p^\mu \epsilon_\mu^*(\mathbf{p}, i) \hat{a}_{\mathbf{p},i}^\dagger e^{ipx} = \\ &= (\partial^\mu A_\mu)^+ + (\partial^\mu A_\mu)^- \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} \langle \text{fisici} | (\partial^\mu A_\mu)^+ + (\partial^\mu A_\mu)^- | \text{fisici} \rangle &= \\ \langle \text{fisici} | (\partial^\mu A_\mu)^+ | \text{fisici} \rangle + \langle \text{fisici} | (\partial^\mu A_\mu)^- | \text{fisici} \rangle &= 0 \Rightarrow \langle \text{fisici} | (\partial^\mu A_\mu)^+ | \text{fisici} \rangle = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Vediamo come si traduce la condizione (4.14) sugli stati ad una particella. Consideriamo lo stato più generico generato dagli operatori di creazione

$$|\Psi\rangle = \sum_i c_i \hat{a}_{\mathbf{p},i}^\dagger |0\rangle$$

ed applichiamo la (4.14) e consideriamo, per semplicità, $p^\mu = (p, p, 0, 0)$ (K tiene conto dei fattori costanti)

$$\begin{aligned} 0 &= \partial^\mu A_\mu |\Psi\rangle = K(\hat{a}_{\mathbf{p},0} + \hat{a}_{\mathbf{p},1})(c_0 \hat{a}_{\mathbf{p},0}^\dagger + c_1 \hat{a}_{\mathbf{p},1}^\dagger + c_2 \hat{a}_{\mathbf{p},2}^\dagger + c_3 \hat{a}_{\mathbf{p},3}^\dagger) |0\rangle = \\ K(c_1 \hat{a}_{\mathbf{p},1} \hat{a}_{\mathbf{p},1}^\dagger + c_0 \hat{a}_{\mathbf{p},0} \hat{a}_{\mathbf{p},0}^\dagger) |0\rangle &= K(c_1 \hat{a}_{\mathbf{p},1} \hat{a}_{\mathbf{p},1}^\dagger + c_0 \hat{a}_{\mathbf{p},0} \hat{a}_{\mathbf{p},0}^\dagger) |0\rangle - K(c_1 \hat{a}_{\mathbf{p},1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p},1} + c_0 \hat{a}_{\mathbf{p},0}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p},0}) |0\rangle = \\ &= K(c_0 [\hat{a}_{\mathbf{p},0}, \hat{a}_{\mathbf{p},0}^\dagger] + c_1 [\hat{a}_{\mathbf{p},1}, \hat{a}_{\mathbf{p},1}^\dagger]) |0\rangle = K(-c_0 [\hat{a}_{\mathbf{p},0}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{p},0}] + c_1 [\hat{a}_{\mathbf{p},1}, \hat{a}_{\mathbf{p},1}^\dagger]) |0\rangle = K(c_0 + c_1) (\delta^{(3)}(\mathbf{0})) \\ &\Rightarrow c_0 + c_1 = 0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

in cui gran parte dei prodotti sono nulli grazie alle regole di commutazione (4.13) con le quali possiamo far agire gli operatori di distruzione sul vuoto. La (4.15) ci dice una cosa molto importante: gli stati di oscillatori trasversi al p^μ di propagazione sono i soli stati fisici. Dato che due (e non tre) delle componenti spaziali del quadrimpulso possono essere nulle e quindi ci sarà sempre uno oscillatore spaziale non fisico (ossia quello corrispondente alla componente non nulla del quadrimpulso); ancora più importante è il fatto che, dato che la componente temporale del quadrimpulso deve essere sempre diversa da zero (perchè è la componente energetica, se fosse zero non avremmo il fotone) lo stato di oscillatore temporale (quello a norma negativa) non è mai fisico (e siamo quindi liberi dal doverci preoccupare della norma negativa). Tuttavia possiamo costruire degli stati ad hoc con gli oscillatori non fisici; infatti lo stato

$$|\Phi\rangle = (c_0 \hat{a}_{\mathbf{p},0}^\dagger + c_1 \hat{a}_{\mathbf{p},1}^\dagger)|0\rangle = c(\hat{a}_{\mathbf{p},0}^\dagger - \hat{a}_{\mathbf{p},1}^\dagger)|0\rangle$$

soddisfa la condizione di stato fisico (4.15) nonostante sia costruito con oscillatori non fisici. Quindi gli stati fisici si scrivono, in generale, nella forma

$$|fiscici\rangle = |\Psi_T\rangle + |\Phi\rangle, \quad (4.16)$$

in cui $|\Psi_T\rangle$ indica stati creati solo con oscillatori trasversi. Nonostante la presenza formale degli stati $|\Phi\rangle$ notiamo che quest'ultimi non danno contributi misurabili; per vederlo consideriamo il prodotto scalare dello stato $|\Phi\rangle$ con se stesso e con lo stato $|\Psi_T\rangle$

$$\begin{aligned} \langle \Phi|\Phi\rangle &= |c|^2 \langle 0|(\hat{a}_{\mathbf{p},0} - \hat{a}_{\mathbf{p},1})(\hat{a}_{\mathbf{p},0}^\dagger - \hat{a}_{\mathbf{p},1}^\dagger)|0\rangle = \langle 0|(\hat{a}_{\mathbf{p},0}\hat{a}_{\mathbf{p},0}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{p},1}\hat{a}_{\mathbf{p},1}^\dagger)|0\rangle = \\ &= \langle 0|([\hat{a}_{\mathbf{p},0}, \hat{a}_{\mathbf{p},0}^\dagger] + [\hat{a}_{\mathbf{p},1}, \hat{a}_{\mathbf{p},1}^\dagger])|0\rangle = 0; \\ \langle \Psi_T|\Phi\rangle &= c \langle 0|(c_2 \hat{a}_{\mathbf{p},2} + c_3 \hat{a}_{\mathbf{p},3})(\hat{a}_{\mathbf{p},0}^\dagger - \hat{a}_{\mathbf{p},1}^\dagger)|0\rangle = 0 \end{aligned}$$

questo vuol dire che nei prodotti scalari gli stati fisici sono equivalenti ai prodotti scalari dei soli stati trasversi

$$\langle fiscici'|fiscici\rangle \equiv \langle \Psi_T'|\Psi_T\rangle. \quad (4.17)$$

Inoltre scrivendo la hamiltoniana e l'operatore di impulso come integrale su tutti gli impulsi della somma di quattro oscillatori, si vede immediatamente che negli elementi di matrice di questi operatori i contributi degli stati $|\Phi\rangle$ sono identicamente nulli. In definitiva lo stato fisico $|fiscico\rangle = |\Psi_T\rangle + |\Phi\rangle$ è, da tutti i punti di vista, completamente equivalente al solo stato $|\Psi_T\rangle$ dato che hanno stassa energia, stesso momento ed uguali prodotti scalari con tutti gli altri stati fisici.

È importante notare che se avessimo quantizzato nella gauge di radiazione (gauge di Coulomb più gauge temporale, ossia $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ e $A_0 = 0$) avremmo direttamente ottenuto (con semplice sostituzione di $A_\mu(x)$ nelle equazioni del moto e nella condizione $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) la trasversalità delle polarizzazioni del fotone. La quantizzazione alla Gupta-Bleuler, quindi, fornisce uno schema consistente nel caso di teoria non interagente, mentre, in una teoria interagente, bisogna accertarsi che l'interazione tra gli stati fisici non comporti la creazione di stati non fisici.

Capitolo 5

Campo spinoriale di Dirac e sua quantizzazione

Il campo spinoriale di Dirac è stato il primo campo di particelle a spin semintero, nello specifico il campo di Dirac descrive le particelle di spin pari ad $\frac{1}{2}$. Una buona parte delle particelle elementari possiedono spin pari ad $\frac{1}{2}$: i leptoni (elettroni, muoni, tauoni e corrispondenti neutrini), i quark (particelle costituenti gli adroni come il protone, il neutrone, i pioni etc etc); per questo motivo il campo di Dirac è di primaria importanza nella teoria dei campi. L'equazione che descrive le particelle di spin $\frac{1}{2}$ è l'equazione di Dirac, $(i\hat{\not{d}} - m)_{\alpha\beta}\psi_{\alpha}(x) = 0$, in cui la $\psi_{\alpha}(x)$ è un spinore di Dirac (l'indice in basso denota l'indice spinoriale) e trasforma con la rappresentazione del gruppo di Lorentz $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$, ossia come somma diretta di due rappresentazioni di Weyl una sinistrorsa e l'altra destrorsa. È essenziale ricordare che nella teoria di Dirac, più che il campo dagato, si ha a che fare con il campo Dirac-aggiunto, ossia il campo $\bar{\psi}_{\alpha} = \psi_{\beta}^{\dagger}\gamma_{\alpha\beta}^0$. Importanti nella teoria di Dirac sono le matrici gamma, che non hanno espressione univoca, ma che devono soddisfare la regola di anticommutazione

$$\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 2\eta_{ij},$$

in cui η è la metrica di Minkowski.

In questo capitolo vedremo la quantizzazione nel formalismo degli integrali funzionali, deriveremo il propagatore fermionico ed, infine, vedremo come la teoria di Dirac predice l'esistenza dell'antimateria ma, prima di tutto, dobbiamo definire un'importante classe di variabili numeriche: le variabili anticommutanti di Grassman. Inoltre in **Appendice C** è mostrato un esempio del teorema di spin-statistica.

5.1 Campi fermionici come oscillatori

Sappiamo che ogni campo quantistico può essere esteso come una somma infinita di oscillatori e la quantizzazione canonica dei campi parte proprio dalle regole di commutazione degli operatori di creazione e distruzione. Tuttavia, mentre nel caso di campi bosonici l'applicazione delle relazioni di commutazione porta nella giusta direzione, nel caso di campi fermionici l'imposizione delle regole di commutazione produce incongruenze (ad esempio una hamiltoniana definita negativa). Per poter sviluppare i campi spinoriali in oscillatori è opportuno definire un nuovo tipo di oscillatore detto di Fermi che tiene conto del principio di esclusione di Pauli secondo il quale, due fermioni identici non possono trovarsi nello stesso stato quantistico simultaneamente; questo impone le seguenti azioni degli operatori di creazione e distruzione

$$\hat{a}^\dagger|0\rangle = |1\rangle, \quad \hat{a}|1\rangle = |0\rangle, \quad \hat{a}|0\rangle = \hat{a}^\dagger|1\rangle = 0. \quad (5.1)$$

La hamiltoniana dell'oscillatore di Fermi è identica a quella dell'oscillatore ordinario

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a};$$

le azioni (5.1) definiscono le regole di anticommutazione. Se imponessimo le regole di commutazione canoniche avremmo

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \Rightarrow |1\rangle = [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]|1\rangle = \hat{a}\hat{a}^\dagger|1\rangle - \hat{a}^\dagger\hat{a}|1\rangle = 0 - |1\rangle$$

il che, evidentemente non funziona; provando con l'anticommutatore otteniamo

$$\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\}|1\rangle = \hat{a}\hat{a}^\dagger|1\rangle + \hat{a}^\dagger\hat{a}|1\rangle = 0 + |1\rangle \Rightarrow \{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = 1.$$

Ridefinendo gli operatori di creazione e distruzione come $\hat{\hat{a}} = \sqrt{\hbar}\hat{a}$ e $\hat{\hat{a}}^\dagger = \sqrt{\hbar}\hat{a}^\dagger$ le relazioni di anticommutazione e commutazione diventano

$$\{\hat{\hat{a}}, \hat{\hat{a}}^\dagger\} = \hbar, \quad [\hat{\hat{a}}, \hat{\hat{a}}^\dagger] = \hbar; \quad (5.2)$$

nel limite classico questo vuol dire che le variabili di oscillatori bosonici sono commutanti mentre nel caso dell'oscillatore di Fermi sono anticommutanti. Quest'ultima considerazione comporta che l'integrale sui cammini per campi sviluppabili in oscillatori di Fermi deve essere calcolato su variabili anticommutanti; questo tipo di variabili sono dette variabili (ossia variabili anticommutanti) di Grassman.

5.1.1 Variabili anticommutanti di Grassman

Iniziamo una breve trattazione sulle variabili di Grassman; ulteriori dettagli sulle algebre di Grassman (o algebre esterne) si trovano in **Appendice B**. Un numero di Grassman, θ_i , è una variabile anticommutante che anticommuta con tutti gli altri numeri di Grassman

$$\theta_i\theta_j = -\theta_j\theta_i,$$

mentre commuta con le variabili numeriche ordinarie

$$\theta_i x_j = x_j \theta_i.$$

Vediamo qualche implicazione dell'anticommutazione delle variabili di Grassman:

1. È possibile costruire combinazioni lineari di variabili di Grassman dato che le stesse commutano con le variabili ordinarie e quindi non si crea nessuna ambiguità di segno;

2. Poichè le variabili anticommutano segue che $\theta_i^2 = -\theta_i^2 = 0$;
3. Dato che $\theta_i\theta_j = -\theta_j\theta_i$ si ha $d\theta_i\theta_j = -\theta_jd\theta_i$, per cui il differenziale di una variabile anticommutante è una variabile anticommutante;
4. Ancora da $\theta_i\theta_j = -\theta_j\theta_i$ segue che $\frac{d}{d\theta_j}(\theta_i\theta_j) = \frac{d}{d\theta_j}(-\theta_j\theta_i) = -\theta_i$ o, ancora, $\frac{d}{d\theta_k}(\theta_i\theta_j\theta_k) = \frac{d}{d\theta_k}(-\theta_i\theta_k\theta_j) = \frac{d}{d\theta_k}(\theta_k\theta_i\theta_j) = \theta_i\theta_j$, come ulteriore conseguenza le derivate anticommutano tra loro;
5. Dato che $\theta_i^2 = 0$, gli sviluppi di Taylor si fermano al primo ordine per cui $\int d\theta_i f(\theta_i) = \int d\theta_i (A + B\theta_i)$;
6. Richiedendo la consueta invarianza per traslazioni dell'operatore integrale si ottiene che sotto la trasformazione $\theta_i \rightarrow \theta_i + \theta_j$ si ha $\int d\theta_i (A + B(\theta_i + \theta_j)) = \int d\theta_i ((A + B\theta_j) + B\theta_i) = (A + B\theta_j) \int d\theta_i + \int d\theta_i B\theta_i$. Il primo integrale deve essere nullo perchè il differenziale è una variabile anticommutante e quindi dovrebbe esserlo anche l'integrale, tuttavia il risultato dell'integrale è un numero ordinario e non può che essere zero essendo l'unico numero ordinario (banalmente) anticommutante. Il secondo integrale non può essere $\frac{B}{2}\theta_j^2$ perchè altrimenti sarebbe identicamente nullo (lo sarebbe anche se desse come risultato funzioni di grado più elevato) e si ricadrebbe nel caso precedente, cosa che non è. Non è possibile, neppure, che sia una funzione lineare di θ_i perchè altrimenti sarebbe una variabile anticommutante ed il risultato di un integrale non appartiene a questa classe di variabili. Resta solo la possibilità che sia una costante, per convenzione si sceglie pari a B ;
7. Dal punto 4 e dal punto 6 segue che:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta_i} 1 &= 0, \quad \frac{d}{d\theta_i} \theta_i = 1; \\ \int d\theta_i 1 &= 0, \quad \int d\theta_i \theta_i = 1. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Per variabili di Grassman integrazione e derivazione sono la stessa operazione.

È utile considerare il comportamento di alcuni integrali gaussiani andando a confrontare il caso di variabili fermioniche (variabili di Grassman) e quello di variabili bosoniche (variabili ordinarie). In questa sezione riportiamo solo il risultato ed il confronto:

$$\begin{aligned} \int d^n x d^n y e^{-b(x_i A_{ij} y_j)} &= \begin{cases} \frac{\pi^n}{b^n \det(\hat{A})} & (\text{bosonico}) \\ b^n \det(\hat{A}) & (\text{fermionico}) \end{cases} \\ \int d^n x d^n y y_i x_j e^{-b(x_i A_{ij} y_j)} &= \begin{cases} \frac{\pi^n}{b^n \det(\hat{A})} (A^{-1})_{ij} & (\text{bosonico}) \\ b^n \det(\hat{A}) (A^{-1})_{ij} & (\text{fermionico}) \end{cases} \end{aligned} \tag{5.4}$$

in generale, la valutazione su variabili fermioniche (a meno di costanti numeriche ordinarie) corrisponde alla "sostituzione" $\frac{1}{\det(\hat{A})} \rightarrow \det(\hat{A})$.

5.2 Funzionale per il campo di Dirac e propagatore fermionico

Ora che sappiamo di dover avere a che fare con variabili anticommutanti di Grassman passiamo alla descrizione e quantizzazione del campo di Dirac nel formalismo degli integrali funzionali. In generale, un campo di Grassman è definito come una funzione del punto a valori anticommutanti, ossia

$$\psi(x) = \sum_i \psi_i \phi_i(x),$$

in cui le funzioni $\phi_i(x)$ sono ordinarie funzioni a valori numerici mentre le ψ_i sono coefficienti numerici di Grassman.

Definiamo il funzionale generatore del campo di Dirac come

$$Z[\mathbf{J}] = \int D[\psi\bar{\psi}] e^{i \int d^4x [\bar{\psi}(x)\hat{D}\psi(x) - \bar{J}(x)\psi(x) - \bar{\psi}(x)J(x)]}, \quad (5.5)$$

in cui $\hat{D} = i\gamma^\mu\partial_\mu - m$ è l'operatore di Dirac ed in cui, dato che la densità di lagrangiana deve essere uno scalare ordinario, $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $J(x)$ e $\bar{J}(x)$ devono essere variabili anticommutanti (infatti dalle proprietà delle variabili di Grassman segue che il prodotto di due variabili anticommutanti è un numero ordinario). Introduciamo il propagatore, $S_F(x-y)$, come nucleo dell'operatore (integrale) inverso, \hat{D}^{-1} , dell'operatore di Dirac e che soddisfa quindi l'equazione

$$\hat{D}S_F(x-y) = \delta^{(4)}(x-y).$$

Sommiamo e sottraiamo all'esponente della (5.5) la quantità $-i \int d^4x \hat{D}^{-1}\bar{J}(x)\hat{D}\hat{D}^{-1}J(x)$ e notiamo che

$$\begin{aligned} \int d^4x \bar{\psi}(x)J(x) &= \int d^4x \bar{\psi}(x)\hat{D}\hat{D}^{-1}J(x); \\ \int d^4x \bar{J}(x)\psi(x) &= \int d^4x \bar{J}(x)\hat{D}^{-1}\hat{D}\psi(x) \end{aligned}$$

per cui il funzionale generatore si può scrivere come

$$\begin{aligned} Z[\mathbf{J}] &= \int D[\psi\bar{\psi}] e^{i \int d^4x [\bar{\psi}(x)\hat{D}\psi(x) - \bar{J}(x)\psi(x) - \bar{\psi}(x)J(x)]} = \\ &= \int D[\psi\bar{\psi}] e^{i \int d^4x [\bar{\psi}(x)\hat{D}\psi(x) - \bar{J}(x)\hat{D}^{-1}\hat{D}\psi(x) - \bar{\psi}(x)\hat{D}\hat{D}^{-1}J(x) - \hat{D}^{-1}\bar{J}(x)\hat{D}\hat{D}^{-1}J(x) + \hat{D}^{-1}\bar{J}(x)\hat{D}\hat{D}^{-1}J(x)]} = \\ &= e^{-i \int d^4x \hat{D}^{-1}\bar{J}(x)\hat{D}\hat{D}^{-1}J(x)} \int D[\psi\bar{\psi}] e^{i \int d^4x [(\bar{\psi} - \bar{J}(x)\hat{D}^{-1})\hat{D}(\psi(x) - \hat{D}^{-1}J(x))]} = c e^{-i \int d^4x \hat{D}^{-1}\bar{J}(x)\hat{D}\hat{D}^{-1}J(x)}, \end{aligned}$$

essendo l'integrale funzionale, con un opportuno cambio di variabili, indipendente dalle sorgenti e quindi una costante c -numerica. Il funzionale generatore (5.5) si scrive quindi

$$Z[\mathbf{J}] = c e^{-i \int d^4x \hat{D}^{-1}\bar{J}(x)\hat{D}\hat{D}^{-1}J(x)} = c e^{-i \int d^4x \bar{J}(x)\hat{D}^{-1}J(x)} = c e^{-i \int \int d^4x d^4y \bar{J}(x)S_F(x-y)J(y)}, \quad (5.6)$$

in cui, come sappiamo, $S_F(x-y)$ è il propagatore a due punti che ora determineremo. Noi conosciamo il propagatore dell'equazione di Klein-Gordon per cui

$$\begin{aligned} (\square + m^2)\Delta_F(x-y) &= (\not{\partial} + im)(\not{\partial} - im)\Delta_F(x-y) = -\delta^{(4)}(x-y) \\ \Rightarrow i(\not{\partial} + im)i(\not{\partial} - im)\Delta_F(x-y) &= (i\not{\partial} - m)(i\not{\partial} + m)\Delta_F(x-y) = \delta^{(4)}(x-y) \Rightarrow \\ \Rightarrow S_F(x-y) &= -(i\not{\partial} + m)\Delta_F(x-y) \end{aligned}$$

e quindi calcolandolo nello spazio degli impulsi si ottiene

$$\begin{aligned} \tilde{S}_F(x-y) &= \mathcal{F}(-i\not{\partial} + m)\mathcal{F}(\Delta_F(x-y)) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \Rightarrow \\ \Rightarrow S_F(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{\not{p} + m}{(\not{p} + m)(\not{p} - m) + i\epsilon} = \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

5.3 Particelle ed antiparticelle

Vediamo qui come l'equazione di Dirac preveda l'esistenza di due "tipologie" di particelle: le particelle e le antiparticelle. Scriviamo i campi di Dirac espressi tramite gli operatori di creazione e distruzione

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(x) &= \sum_{s=1}^2 \int d\mathbf{p} \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3}} \left(\hat{a}_{\mathbf{p},s} u_s(\mathbf{p}) e^{-ipx} + \hat{b}_{\mathbf{p},s}^\dagger v_s(\mathbf{p}) e^{ipx} \right); \\ \psi_\alpha^\dagger(x) &= \sum_{s=1}^2 \int d\mathbf{p} \sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}(2\pi)^3}} \left(\hat{b}_{\mathbf{p},s} v_s^\dagger(\mathbf{p}) e^{-ipx} + \hat{a}_{\mathbf{p},s}^\dagger u_s^\dagger(\mathbf{p}) e^{ipx} \right).\end{aligned}$$

Sappiamo che gli operatori di distruzione annichilano il vuoto, ossia

$$\hat{a}_{\mathbf{p},s}|0\rangle = \hat{b}_{\mathbf{p},s}|0\rangle = 0,$$

mentre gli operatori di creazione, creeranno stati ad una particella

$$\hat{a}_{\mathbf{p},s}^\dagger|0\rangle = |a, \mathbf{p}, s\rangle, \quad \hat{b}_{\mathbf{p},s}^\dagger|0\rangle = |b, \mathbf{p}, s\rangle;$$

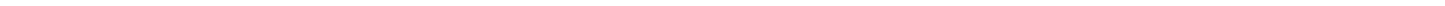
inoltre, conosciamo le regole di anticommutazione di questi operatori

$$\{\hat{a}_{\mathbf{p},s}, \hat{a}_{\mathbf{q},r}^\dagger\} = \{\hat{b}_{\mathbf{p},s}, \hat{b}_{\mathbf{q},r}^\dagger\} = \delta_{sr} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad \{\hat{a}_{\mathbf{p},s}, \hat{b}_{\mathbf{q},r}^\dagger\} = \{\hat{b}_{\mathbf{p},s}, \hat{a}_{\mathbf{q},r}^\dagger\} = 0.$$

Sfruttando le regole di anticommutazione possiamo immediatamente notare che

$$\begin{aligned}\langle s, \mathbf{p}, a | b, \mathbf{q}, r \rangle &= \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p},s} \hat{b}_{\mathbf{q},r}^\dagger | 0 \rangle = - \langle 0 | \hat{b}_{\mathbf{q},r}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p},s} | 0 \rangle = 0; \\ \langle s, \mathbf{p}, a | a, \mathbf{q}, r \rangle &= \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p},s} \hat{a}_{\mathbf{q},r}^\dagger | 0 \rangle = - \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{q},r}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p},s} | 0 \rangle + \delta_{sr} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \langle 0 | 0 \rangle = \delta_{sr} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}); \\ \langle s, \mathbf{p}, b | b, \mathbf{q}, r \rangle &= \langle 0 | \hat{b}_{\mathbf{p},s} \hat{b}_{\mathbf{q},r}^\dagger | 0 \rangle = - \langle 0 | \hat{b}_{\mathbf{q},r}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p},s} | 0 \rangle + \delta_{sr} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \langle 0 | 0 \rangle = \delta_{sr} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}).\end{aligned}\tag{5.8}$$

Come vediamo dalle (5.8) gli stati creati dagli operatori \hat{a}^\dagger sono ortogonali agli stati creati dagli operatori \hat{b}^\dagger ; questo vuol dire che sono particelle diverse: per convenzione si chiamano antiparticelle quelle create dagli operatori \hat{b}^\dagger . Si arriva alla stessa conclusione partendo dal formalismo dell'integrale funzionale, nel quale la differenza tra particelle e antiparticelle viene dedotta a partire dai propagatori. È importante sottolineare che è possibile costruire campi di spin $\frac{1}{2}$ in cui le particelle coincidono con le antiparticelle; questo tipo di campi sono detti campi di Majorana ma questi campi non possono descrivere l'elettrone o i quark. In generale, un campo di Majorana non descrive un fermione di spin $\frac{1}{2}$ con carica elettrica poichè questo è un numero quantico che cambia nel passaggio da particella a antiparticella; i campi di Majorana potrebbero, eventualmente, descrivere fermioni neutri; nello specifico si pensa possano descrivere i neutrini.



Capitolo 6

Simmetrie

Le simmetrie sono una via maestra per studiare e descrivere la fisica. La storia delle simmetrie inizia con il formalismo lagrangiano ed il teorema di Noether, il quale mette, inequivocabilmente, in luce la profonda connessione tra le simmetrie e le leggi di conservazione. Nella teoria dei campi, il ruolo delle simmetrie diviene ancora più centrale: le teorie di campo, in particolar modo quelle interagenti, sono costruite sulla base di principi primi di simmetria che ne definiscono la forma ed il contenuto. Le interazioni sono concesse o proibite sulla base delle simmetrie che è richiesto che la teoria soddisfi (questo già accade nella fisica atomica in cui le possibili transizioni tra livelli atomici sono dettate dalle regole di selezione calcolate a partire da proprietà di simmetria). Le teorie che si basano sull'esistenza di un gruppo di simmetria della teoria stessa sono dette teorie di gauge e l'importanza di queste teorie per la fisica nasce dall'enorme successo di questo formalismo matematico nel descrivere, in un quadro teorico unificato, le teorie di campo quantistico di tre delle quattro forze fondamentali della natura: l'elettromagnetismo, l'interazione nucleare debole e l'interazione nucleare forte. In conclusione, le simmetrie definiscono la fisica.

In questo capitolo vedremo come le simmetrie siano legate alle leggi di conservazione; vedremo come le considerazioni sulla simmetria di gauge del campo EM ci permetteranno di capire che tipo di accoppiamento deve esistere tra campi di materia ed il campo EM stesso; vedremo come le simmetrie del vuoto definiscano le simmetrie dell'intera teoria (in **Appendice D**) e studieremo un'identità di primaria importanza nella teoria dei campi: l'identità di Ward-Takahashi generalizzata.

6.1 Simmetrie e leggi di conservazione

Il punto di partenza è il formalismo lagrangiano. Consideriamo una trasformazione di un campo generico

$$\phi_{(a,b)}^\alpha(x) \rightarrow \phi_{(a,b)}^\alpha(x) + i\epsilon^a(x)(T_a)_\beta^\alpha \mathcal{Q}^\beta(x), \quad (6.1)$$

in cui $\epsilon(x)$ dipende dal punto dello spazio-tempo, $\mathcal{Q}(x)$ dipende dal campo e dalle sue derivate e T_a è una matrice hermitiana che fornisce una rappresentazione del gruppo di Lie di simmetria della teoria; gli indici α e β corrono sulla dimensione dello spazio mentre a sulla dimensione del gruppo di simmetria. Una trasformazione di questo tipo è detta locale. Sotto questa trasformazione la variazione dell'azione sarà della forma

$$\delta S = - \int d^4x j_a^\mu(x) \frac{\partial \epsilon^a(x)}{\partial x^\mu} \quad (6.2)$$

dato che imponiamo che la corrispettiva trasformazione globale (in cui ϵ non dipende dal punto) renda nulla la variazione dell'azione. Imponiamo ora che anche la simmetria locale annulli la variazione dell'azione; integrando per parti la relazione appena scritta e imponendo che tutto si annulli all'infinito abbiamo

$$\delta S = \int d^4x \epsilon^a(x) \frac{\partial j_a^\mu(x)}{\partial x^\mu} = 0 \Rightarrow \frac{j_a^\mu(x)}{\partial x^\mu} = 0. \quad (6.3)$$

Dalla (6.3) possiamo scrivere

$$\frac{dQ_a}{dt} = \frac{d}{dt} \int d\mathbf{x} j_a^0(x) = - \int d\mathbf{x} \frac{j_a^0(x)}{\partial x^0} = - \int d\mathbf{x} \frac{j_a^i(x)}{\partial x^i} = \int j_a^i(x) n_i dS = 0,$$

il che comporta la conservazione della quantità Q che è detta carica (la $j^\mu(x)$ è detta corrente). Quindi, il fatto che la trasformazione (6.1) sia una simmetria della teoria comporta la conservazione di certe quantità. Immaginiamo che la nostra trasformazione comporti l'annullamento della variazione dell'azione e anche della lagrangiana; in questo caso la variazione dell'azione si può scrivere come (in cui supponiamo ϵ dipendente solo dal tempo)

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dt d\mathbf{x} \left(\frac{\delta L}{\delta \phi_{(a,b)}^\alpha} \delta \phi_{(a,b)}^\alpha + \frac{\delta L}{\delta (\partial_0 \phi_{(a,b)}^\alpha)} \delta (\partial_0 \phi_{(a,b)}^\alpha) \right) = \\ &= i \int dt d\mathbf{x} \left(\frac{\delta L}{\delta \phi_{(a,b)}^\alpha} \epsilon^a(t) (T_a)_\beta^\alpha \mathcal{Q}^\beta(x) + \frac{\delta L}{\delta (\partial_0 \phi_{(a,b)}^\alpha)} \partial_0 (\epsilon^a(t) (T_a)_\beta^\alpha \mathcal{Q}^\beta(x)) \right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

avendo sostituito le variazioni dei campi grazie alla (6.1). Sapendo che la trasformazione deve essere una simmetria globale sappiamo che

$$\begin{aligned} \delta S &= i \int dt d\mathbf{x} \left(\frac{\delta L}{\delta \phi_{(a,b)}^\alpha} \epsilon^a (T_a)_\beta^\alpha \mathcal{Q}^\beta(x) + \frac{\delta L}{\delta (\partial_0 \phi_{(a,b)}^\alpha)} \epsilon^a (T_a)_\beta^\alpha \partial_0 (\mathcal{Q}^\beta(x)) \right) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\delta L}{\delta (\partial_0 \phi_{(a,b)}^\alpha)} \epsilon^a (T_a)_\beta^\alpha \partial_0 (\mathcal{Q}^\beta(x)) = - \frac{\delta L}{\delta \phi_{(a,b)}^\alpha} \epsilon^a (T_a)_\beta^\alpha \mathcal{Q}^\beta(x) \end{aligned}$$

quindi la variazione (6.4) diventa

$$\delta S = i \int dt d\mathbf{x} \frac{\delta L}{\delta (\partial_0 \phi_{(a,b)}^\alpha)} \mathcal{Q}^\beta(x) \partial_0 (\epsilon^a(t) (T_a)_\beta^\alpha)$$

che comparata con la (6.2) in cui poniamo $\mu = 0$ restituisce la forma della carica

$$\begin{aligned} i \int dt d\mathbf{x} \frac{\delta L}{\delta(\partial_0 \phi_{(a,b)}^\alpha)} \mathcal{Q}^\beta(x) \partial_0(\epsilon^a(t)(T_a)_\beta^\alpha) &= - \int dt d\mathbf{x} j_a^0(x) \frac{\partial \epsilon^a(t)}{\partial x^0} \Rightarrow \\ \Rightarrow Q_a &= \int d\mathbf{x} j_a^0(x) = -i \int d\mathbf{x} \frac{\delta L}{\delta(\partial_0 \phi_{(a,b)}^\alpha)} (T_a)_\beta^\alpha \mathcal{Q}^\beta(x) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Ripetendo esattamente gli stessi passaggi, possiamo immaginare che la nostra trasformazione comporti l'annullamento della variazione dell'azione, della lagrangiana e anche della densità di lagrangiana; in questo caso la variazione dell'azione si può scrivere come

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_{(a,b)}^\alpha} \delta \phi_{(a,b)}^\alpha + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_{(a,b)}^\alpha)} \delta(\partial_\mu \phi_{(a,b)}^\alpha) \right) = \\ &= i \int d^4x \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_{(a,b)}^\alpha} \epsilon^a(x) (T_a)_\beta^\alpha \mathcal{Q}^\beta(x) + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_{(a,b)}^\alpha)} \partial_\mu(\epsilon^a(x) (T_a)_\beta^\alpha \mathcal{Q}^\beta(x)) \right) \end{aligned} \quad (6.6)$$

avendo sostituito le variazioni dei campi grazie alla (6.1). Sapendo che la trasformazione deve essere una simmetria globale sappiamo che

$$\begin{aligned} \delta S &= i \int d^4x \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_{(a,b)}^\alpha} \epsilon^a (T_a)_\beta^\alpha \mathcal{Q}^\beta(x) + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 \phi_{(a,b)}^\alpha)} \epsilon^a (T_a)_\beta^\alpha \partial_0(\mathcal{Q}^\beta(x)) \right) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_{(a,b)}^\alpha)} \epsilon^a (T_a)_\beta^\alpha \partial_0(\mathcal{Q}^\beta(x)) &= - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_{(a,b)}^\alpha} \epsilon^a (T_a)_\beta^\alpha \mathcal{Q}^\beta(x) \end{aligned}$$

quindi la variazione (6.6) diventa

$$\delta S = i \int d^4x \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_{(a,b)}^\alpha)} \mathcal{Q}^\beta(x) \partial_\mu(\epsilon^a(x) (T_a)_\beta^\alpha)$$

che comparata con la (6.2) restituisce la forma della corrente

$$i \int d^4x \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_{(a,b)}^\alpha)} \mathcal{Q}^\beta(x) \partial_\mu(\epsilon^a(x) (T_a)_\beta^\alpha) = - \int d^4x j_a^\mu(x) \frac{\partial \epsilon^a(x)}{\partial x^\mu} \Rightarrow j_a^\mu(x) = i \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_{(a,b)}^\alpha)} \mathcal{Q}^\beta(x) (T_a)_\beta^\alpha. \quad (6.7)$$

Quindi, di nuovo, le simmetrie corrispondono a quantità conservate e tanto più la teoria è invariante sotto questa simmetria (ossia se è invariante solo l'azione, se lo sono l'azione e la lagrangiana o se lo sono l'azione, la lagrangiana e la densità di lagrangiana) tanto più è possibile determinare forme analitiche della corrente o della carica. È importante sottolineare che ci sono, quindi, tante cariche e correnti quanti sono i generatori del gruppo di Lie di simmetria. Nel caso dell'elettrodinamica il gruppo di simmetria è $U(1)$, che possiede un generatore; abbiamo quindi una carica conservata (che è proprio la carica elettrica). Nel caso del gruppo di simmetria della QCD, il gruppo $SU(3)$ abbiamo 8 generatori e quindi 8 cariche conservate.

6.2 Invarianza di gauge ed accoppiamento con il campo EM

In questa sezione vedremo come la richiesta di invarianza di gauge ci permetta di capire come deve essere fatto il termine di accoppiamento tra i campi di materia ed il campo EM. Ricordiamo che il quadripotenziale non trasforma come un quadrivettore; infatti

$$\hat{U}(\Lambda)A_\mu(x)\hat{U}^{-1}(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu A_\nu(x) + \partial_\mu\Omega(x, \Lambda)$$

in cui $\hat{U}(\Lambda)$ è una matrice che appartiene alla rappresentazione del gruppo di Lorentz $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Il termine aggiuntivo è dovuto all'invarianza di gauge del potenziale vettore. Il problema di fondo è che non è possibile costruire un quadrivettore come combinazione degli operatori di creazione e distruzione di un campo senza massa di spin 1. Per evitare il problema di non poter utilizzare il quadripotenziale nella teoria, richiediamo che l'accoppiamento tra il campo di materia e la radiazione EM sia un termine gauge-invariante in modo che il termine aggiuntivo non dia nessun contributo fisicamente rilevante. La variazione dell'azione del campo di materia sotto una generica trasformazione di gauge del quadripotenziale, $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\epsilon(x)$, si scrive

$$\begin{aligned} \delta S_M &= \int d^4x \frac{\delta S_M}{\delta A_\mu(x)} \delta A_\mu(x) = \int d^4x \frac{\delta S_M}{\delta A_\mu(x)} \partial_\mu\epsilon = - \int d^4x \partial_\mu \frac{\delta S_M}{\delta A_\mu(x)} \epsilon(x) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \partial_\mu \frac{\delta S_M}{\delta A_\mu(x)} = 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

in cui l'uguaglianza a zero segue per l'invarianza di Lorentz dell'azione (come scritto nella prima equazione della sezione, quando si fa una trasformazione di Lorentz, abbiamo un termine aggiuntivo dovuto all'invarianza di gauge del quadripotenziale); il risultato della (6.8) fornisce una restrizione non banale per la teoria.

Dal paragrafo precedente, sappiamo che una trasformazione che sia una simmetria della teoria comporta l'esistenza di correnti di conservazione; potremmo costruire una teoria che sia Lorentz invariante accoppiando il quadripotenziale alla corrente conservata (ricordiamo che nel caso della QED, il gruppo di simmetria possiede un generatore e quindi abbiamo una corrente conservata). Se ponessimo

$$\frac{\delta S_M}{\delta A_\mu(x)} \propto j_\mu(x) \quad (6.9)$$

soddisferemo la (6.8) in maniera banale e preserveremo l'invarianza di Lorentz dell'azione; le costanti di proporzionalità possono essere riassorbite nella definizione della carica conservata, la quale ci permette di fissare tutte le altre cariche in termini di una di esse (ricordare che le particelle appartengono ad una certa rappresentazione di un certo gruppo, nel caso della QED il gruppo è $U(1)$ e la loro carica elettrica è pari al valore del generatore della trasformazione in quella data rappresentazione di $U(1)$).

La richiesta (6.9) può essere presa come principio generale di invarianza: l'azione della materia nell'accoppiamento col campo EM deve essere invariante sotto la trasformazione congiunta

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\epsilon(x) ; \phi_{(a,b)}^\alpha(x) \rightarrow \phi_{(a,b)}^\alpha(x) + i\epsilon(x)q\phi_{(a,b)}^\alpha(x) \quad (6.10)$$

In generale il principio che asserisce l'invarianza della teoria sotto la combinazione di trasformazioni, come nella (6.10) è detto principio di gauge.

6.3 Simmetrie in teoria dei campi

In questa sezione svilupperemo alcune idee riguardo le simmetrie e vedremo come queste si applicano al caso della teoria dei campi.

6.3.1 Excursus nella meccanica quantistica

In maniera del tutto apparente, il metodo degli integrali sui cammini non ci permette di calcolare gli elementi di matrice di operatori su stati arbitrari. Consideriamo un sistema quantistico a d gradi di libertà descritto da d variabili scritte compattamente come $\mathbf{q}(t)$; ipotizziamo di conoscere il seguente integrale funzionale

$$0 = \int D[\mathbf{q}(t)] O(t) \mathbf{q}_1(t_1) \dots \mathbf{q}_k(t_k) e^{iS[\mathbf{q}]} \propto \langle 0 | \mathcal{T}[O(t) \mathbf{q}_1(t_1) \dots \mathbf{q}_k(t_k)] | 0 \rangle,$$

per qualunque valore di k e per tempi t_1, \dots, t_k differenti da t . Immaginiamo che per un certo n valga che $t_1 > t_2 > \dots > t_n > t > t_{n+1} > \dots > t_k$ per cui possiamo scrivere

$$0 = \int D[\mathbf{q}(t)] O(t) \mathbf{q}_1(t_1) \dots \mathbf{q}_k(t_k) e^{iS[\mathbf{q}]} \propto \langle 0 | \mathbf{q}_1(t_1) \dots \mathbf{q}_n(t_n) O(t) \mathbf{q}_{n+1}(t_{n+1}) \dots \mathbf{q}_k(t_k) | 0 \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle A | O(t) | B \rangle = 0,$$

in cui $\langle A | = \langle 0 | \mathbf{q}_1(t_1) \dots \mathbf{q}_n(t_n)$ e $| B \rangle = | \mathbf{q}_{n+1}(t_{n+1}) \dots \mathbf{q}_k(t_k) | 0 \rangle$ e poichè il numero ed i tempi con cui abbiamo lavorato sono arbitrari segue che gli stati $\langle A |$ e $| B \rangle$ sono arbitrari e quindi che $O(t) = 0$. Ossia dagli integrali funzionali siamo in grado di ottenere relazioni operatoriali.

6.3.2 Equazioni di Schwinger-Dyson e identità di Ward

Ritorniamo nella teoria dei campi; quello che si è visto nel breve paragrafo sopra è valido anche in teoria dei campi con l'ovvia sostituzione $\mathbf{q}(t) \rightarrow \phi_{(a,b)}(x)$.

Per cominciare, consideriamo le trasformazioni continue infinitesime del campo scalare nella forma

$$\phi'_a(x) = \phi_a(x) + \delta\phi_a(x) \quad (6.11)$$

in cui $\delta\phi_a(x)$ è un parametro infinitesimo e restringiamoci a quelle trasformazioni che lasciano la misura di integrazione funzionale invariata. Consideriamo il seguente integrale funzionale

$$Z[\mathbf{J}] = \int D[\phi] e^{iS - i \int d^4y J_a \phi_a}$$

Come abbiamo imposto, la trasformazione (6.11) non cambia la misura di integrazione e un cambio di variabili non cambia il valore dell'integrale; per cui possiamo scrivere, sviluppando al primo ordine

$$0 = \delta Z[\mathbf{J}] = \int D[\phi] e^{iS' - i \int d^4y J_a \phi'_a} - \int D[\phi] e^{iS - i \int d^4y J_a \phi_a} = \\ = \int D[\phi] e^{iS - i \int d^4y J_a \phi_a} + \int D[\phi] e^{iS - i \int d^4y J_a \phi_a} \left(i \frac{\delta S}{\delta \phi_a(x)} - i J_a(x) \right) \delta\phi_a(x) - \int D[\phi] e^{iS - i \int d^4y J_a \phi_a} = \quad (6.12) \\ = \int D[\phi] e^{iS - i \int d^4y J_a \phi_a} \left(i \frac{\delta S}{\delta \phi_a(x)} - i J_a(x) \right) \delta\phi_a(x).$$

A questo punto, prendiamo k derivate funzionali della (6.12) (ognuna rispetto a $J_j(x_j)$) e poniamo $\mathbf{J} = (J_1(x), \dots, J_n(x)) = \mathbf{0}$, facciamolo esplicitamente nel caso di due derivate funzionali per poi generalizzare a

vista

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{i\delta}{\delta J_1(x_1)} \frac{i\delta}{\delta J_2(x_2)} \left(\int D[\phi] e^{iS-i\int d^4y J_a \phi_a} \left(i \frac{\delta S}{\delta \phi_a(x)} - i J_a(x) \right) \delta \phi_a(x) \right) \Big|_{\mathbf{J}=\mathbf{0}} = \\
&= -\frac{\delta}{\delta J_1(x_1)} \left(\int D[\phi] e^{iS-i\int d^4y J_a \phi_a} (-i\phi_2(x_2)) \left(i \frac{\delta S}{\delta \phi_a(x)} - i J_a(x) \right) \delta \phi_a(x) + \right. \\
&+ \left. \int D[\phi] e^{iS-i\int d^4y J_a \phi_a} \left(-i\delta_{a2}\delta^{(4)}(x-x_2) \right) \delta \phi_a(x) \right) \Big|_{\mathbf{J}=\mathbf{0}} = \\
&= -\left(\int D[\phi] e^{iS-i\int d^4y J_a \phi_a} (-i\phi_1(x_1)) (-i\phi_2(x_2)) \left(i \frac{\delta S}{\delta \phi_a(x)} - i J_a(x) \right) \delta \phi_a(x) + \right. \\
&+ \int D[\phi] e^{iS-i\int d^4y J_a \phi_a} (-i\phi_2(x_2)) \left(-i\delta_{a1}\delta^{(4)}(x-x_1) \right) \delta \phi_a(x) + \\
&+ \left. \int D[\phi] e^{iS-i\int d^4y J_a \phi_a} (-i\phi_1(x_1)) \left(-i\delta_{a2}\delta^{(4)}(x-x_2) \right) \delta \phi_a(x) \right) \Big|_{\mathbf{J}=\mathbf{0}} = \\
&= \int D[\phi] e^{iS} \left[-i \frac{\delta S}{\delta \phi_a(x)} \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) - \phi_2(x_2) \delta_{a1} \delta^{(4)}(x-x_1) - \phi_1(x_1) \delta_{a2} \delta^{(4)}(x-x_2) \right] \delta \phi_a(x),
\end{aligned}$$

in cui abbiamo portato i campi nell'integrale in x perchè essi non dipendono dalle variabili di integrazione. In generale, prendendo le k derivate funzionali, otteniamo

$$\int D[\phi] e^{iS} \left[i \frac{\delta S}{\delta \phi_a(x)} \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \dots \phi_k(x_k) + \sum_{j=1}^k \phi_1(x_1) \dots \delta_{aj} \delta^{(4)}(x-x_j) \dots \phi_k(x_k) \right] \delta \phi_a(x) = 0 \quad (6.13)$$

Ci rendiamo immediatamente conto che se dividessimo la (6.13) per $\int D[\phi] e^{iS}$ (ricordiamo che $D[\phi]$ indica la misura di integrazione data come prodotto delle misure dei singoli campi) otterremo delle funzioni di Green con delle inserzioni; difatti le equazioni (6.13) possono risciversi come

$$\langle 0 | \mathcal{T} \left[\frac{\delta S}{\delta \phi_a(x)} \phi_1(x_1) \dots \phi_k(x_k) \right] | 0 \rangle = \sum_{j=1}^k \langle 0 | \mathcal{T} [\phi_1(x_1) \dots i\delta_{aj} \delta^{(4)}(x-x_j) \dots \phi_k(x_k)] | 0 \rangle . \quad (6.14)$$

Poichè la variazione dell'azione rispetto ai campi restituisce le equazioni di Eulero-Lagrangia, le (6.14) sono interpretabili come equazioni del moto quantistiche delle funzioni di Green, esse ci dicono che un'arbitraria funzione di Green obbedisce alle equazioni del moto classiche, tranne che nei punti in cui gli argomenti di due campi coincidono (questi termini a secondo membro sono detti termini di contatto). Le equazioni (6.14) sono dette equazioni di Schwinger-Dyson e sono le equazioni del moto per un campo quantistico non perturbativo. È possibile derivare anche delle equazioni per le funzioni di Green descrittive stati legati invece che singole particelle, queste equazioni sono dette equazioni di Bethe-Salpeter.

Consideriamo, ora, una teoria con una simmetria continua (quindi la variazione della densità di lagrangiana è nulla) e la relativa corrente di Noether; la variazione della densità di lagrangiana si scrive

$$\begin{aligned}
0 &= \delta \mathcal{L} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_a(x)} \delta \phi_a(x) + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi_a(x))} \delta (\partial_\mu \phi_a(x)) = \\
&= \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi_a(x))} \right) \delta \phi_a(x) + \frac{\delta S}{\delta \phi_a(x)} \delta \phi_a(x) + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi_a(x))} \delta (\partial_\mu \phi_a(x)) = \\
&= \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi_a(x))} \delta \phi_a(x) \right) + \frac{\delta S}{\delta \phi_a(x)} \delta \phi_a(x) = \partial_\mu j^\mu(x) + \frac{\delta S}{\delta \phi_a(x)} \delta \phi_a(x) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \partial_\mu j^\mu(x) = -\frac{\delta S}{\delta \phi_a(x)} \delta \phi_a(x)
\end{aligned}$$

in cui abbiamo usato le equazioni di Eulero-Lagrange ($\frac{\delta S}{\delta \phi_a(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a(x))}$) e la definizione della corrente di Noether. Sostituendo nella prima riga della (6.13) riscritta come segue (portiamo dentro le parentesi il termine $\delta \phi_a(x)$ e sfruttiamo la delta δ_{aj} nella somma su j):

$$\int D[\phi] e^{iS} \left[i \frac{\delta S}{\delta \phi_a(x)} \delta \phi_a(x) \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \dots \phi_k(x_k) + \sum_{j=1}^k \phi_1(x_1) \dots \delta \phi_j(x) \delta^{(4)}(x - x_j) \dots \phi_k(x_k) \right] = 0$$

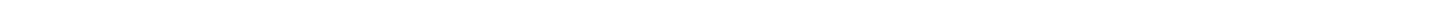
otteniamo

$$\int D[\phi] e^{iS} \left[-i \partial_\mu j^\mu(x) \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \dots \phi_k(x_k) + \sum_{j=1}^k \phi_1(x_1) \dots \delta \phi_j(x) \delta^{(4)}(x - x_j) \dots \phi_k(x_k) \right] = 0.$$

Supponendo la sufficiente regolarità degli integrali funzionali possiamo portare la derivata fuori dall'integrale e dividendo la precedente per $\int D[\phi] e^{iS}$ otteniamo una funzione di Green

$$i \partial_\mu \langle 0 | \mathcal{T}[j^\mu(x) \phi_1(x_1) \dots \phi_k(x_k)] | 0 \rangle = \sum_{j=1}^k \langle 0 | \mathcal{T}[\phi_1(x_1) \dots \delta \phi_j(x) \delta^{(4)}(x - x_j) \dots \phi_k(x_k)] | 0 \rangle; \quad (6.15)$$

le (6.15) mostrano che la conservazione della corrente di Noether è valida anche nella teoria quantistica, con la corrente all'interno di una funzione di correlazione, a parte i termini di contatto di forma che dipendono dalla specificità della trasformazione infinitesimale. Le (6.15) sono le equazioni di Schwinger-Dyson associate alla corrente di Noether e sono chiamate identità di Ward Takahashi generalizzate.



Parte II

Elettrodinamica spinoriale: costruzione, rinormalizzazione ed applicazioni

Capitolo 7

Elettrodinamica quantistica spinoriale

In questo capitolo studieremo più nel dettaglio il caso dell'accoppiamento tra il campo elettromagnetico ed i campi di Dirac. Questa teoria è chiamata elettrodinamica quantistica spinoriale (spQED) per contraddistinguerla dal caso dell'elettrodinamica quantistica scalare (che accoppia campi scalari carichi al campo EM (scQED)). Vedremo come scrivere la densità di lagrangiana della teoria, utilizzando l'accoppiamento minimale (ossia supponendo che l'accoppiamento sia dovuto solo alla carica e non a momenti elettrici o magnetici) ed il concetto di derivata covariante di gauge. Nelle sezioni che seguiranno specializzeremo al caso della spQED la rappresentazione spettrale, le formule di riduzione LSZ e l'identità di Ward-Takahashi; studieremo lo sviluppo perturbativo del funzionale generatore e i corrispondenti diagrammi di Feynman per poi venire allo studio della matrice di scattering e alle regole di Feynman associate.

Nel capitolo sulle simmetrie abbiamo visto che l'accoppiamento tra i campi di materia e il campo EM avviene tramite un termine proporzionale a $A_\mu(x)j^\mu(x)$; poichè la densità di lagrangiana della spQED deve essere invariante di gauge (oltre che di Lorentz) e quindi invariante sotto la trasformazione congiunta (6.10) la costante di proporzionalità è posta uguale a $-ie_0$. Secondo la (6.8) la corrente deve essere conservata per poter dare l'invarianza di Lorentz della teoria, quindi possiamo scegliere solo la corrente vettoriale del campo di Dirac (la corrente assiale non è conservata a meno che le masse dei fermioni non siano nulle, ossia nel cosiddetto limite chirale), per cui $j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$. La densità di Lagrangiana si scrive quindi

$$\mathcal{L}_{spQED} = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_{int} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_0)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(e_0\gamma^\mu A_\mu)\psi. \quad (7.1)$$

stando alle trasformazioni infinitesime (6.10), la (7.1) è costruita per essere invariante sotto la trasformazione

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\epsilon(x); \quad \psi(x) \rightarrow e^{i\epsilon(x)e_0}\psi(x)$$

ossia trasformazioni del gruppo $U(1)$: la spQED possiede come gruppo di simmetria il gruppo abeliano $U(1)$. Nel caso di campo EM esterno è necessario aggiungere un altro termine di interazione della forma $\bar{\psi}(ie_0\gamma^\mu B_\mu)\psi$, in cui $B_\mu(x)$ è il quadripotenziale del campo esterno. Poichè i fotoni sono particelle neutre, l'interazione tra i due campi, o l'interazione del campo EM con se stesso, non sono possibili (almeno nel caso di accoppiamento minimale). Per ottenere la (7.1), generalmente si sostituisce la normale derivata con la derivata covariante, $D_\mu = \partial_\mu - ie_0A_\mu$, nella densità di lagrangiana di Dirac e si aggiunge la densità di lagrangiana di Maxwell. La teoria della spQED ha avuto grandi successi (ad esempio per le predizioni estremamente accurate del momento magnetico anomalo dei leptoni e lo spostamento di Lamb-Retherford dei livelli energetici dell'idrogeno), a tal punto da spingere la ricerca a ipotizzare che tutte le interazioni siano descritte da teorie di gauge con gruppi di simmetria sempre più complessi e ricercati.

7.1 Funzionale generatore e suoi diagrammi di Feynman

Per poter definire uno sviluppo perturbativo dobbiamo dividere la (7.1) nella parte libera ed in quella interagente. È importante sottolineare che i parametri e_0 e m_0 non sono la carica e la massa misurate ma solo dei parametri della densità di lagrangiana; le quantità misurabili verranno fuori dall'interazione stessa. Come già sappiamo la massa delle particelle libere coincide con il parametro m_0 (ci coincide nel caso di nessuna interazione, ossia $e_0 = 0$) e viene modificata dall'interazione del campo di materia con il campo EM; per cui porremo $m = m_0 + \delta m$. Il motivo di questa correzione risiede nel fatto che l'interazione modifica l'energia e l'energia è massa. A questo punto siamo pronti per separare la parte interagente da quella libera della (7.1)

$$\mathcal{L}_{free} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}; \quad \mathcal{L}_{int} = e_0(\bar{\psi}A\psi) + \delta m(\bar{\psi}\psi)$$

i termini di interazione sono 2, il che comporta due differenti vertici di interazione; il primo è il vertice vero e proprio (nel senso che è quello legato alla costante di accoppiamento) mentre il secondo è detto vertice di controtermine di massa. Quando abbiamo visto il caso del campo scalare, il termine di interazione era del tipo $\lambda\phi^4$ ed aveva quindi 4 linee esterne uscenti da ogni vertice che potevano essere anche chiuse su se stesse (vorrebbe dire fare una derivata funzionale del termine esponenziale ed una del termine buttato giù dall'asponenziale); nel caso della spQED, il vertice contiene 3 campi e quindi 3 linee esterne (due fermioniche ed una fotonica), mentre il vertice di controtermine di massa, 2 campi e quindi 2 linee esterne fermioniche. È importante notare che a differenza del caso scalare le derivate funzionali sono fatte, in entrambi i vertici, rispetto a funzioni sorgente diverse (quelle che corrispondono a campi nei due vertici: $\psi(x) \rightarrow i\frac{\delta}{\delta\bar{J}(x)}$, $\bar{\psi}(x) \rightarrow -i\frac{\delta}{\delta J(x)}$ e $A_\mu(x) \rightarrow i\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}$) e questo comporta una drastica semplificazione della combinatoria delle derivate.

Il funzionale generatore dipende da 3 funzioni sorgente (\bar{J} , J e J_μ) e nel caso di assenza di interazioni (ossia quando $e_0 = 0$) deve ridursi al prodotto dei funzionali generatori del campo di Dirac e del campo fotonico, $Z_0[\mathbf{J}] = e^{-i\int d^4x d^4y \bar{J}(x)S_F(x-y)J(y)} e^{\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J^\mu(x)\Delta_F(x-y,0)J_\mu(y)}$; esso si scrive come

$$Z[\mathbf{J}] = e^{\mathcal{V}} Z_0[\mathbf{J}] = \sum_n \frac{\mathcal{V}^n}{n!} Z_0[\mathbf{J}], \quad (7.2)$$

in cui $\mathcal{V} = i\int d^4x e_0(\bar{\psi}A\psi) + \delta m(\bar{\psi}\psi)$ è chiamato operatore di vertice. La (7.2) ha, ovviamente, uno sviluppo in termini diagrammatici ed ogni diagramma con lo stesso fissato numero di vertici corrisponde ad un addendo generato dalle derivate funzionali all'interno dello stesso ordine dello sviluppo. Vediamo vari elementi dei diagrammi:

- Linea fermionica esterna: l'azione di una derivata funzionale rispetto J o \bar{J} su Z_0 produce una linea esterna di tipo fermionico; nello specifico

$$-i\frac{\delta}{\delta J(x)} Z_0 = Z_0 \int d^4y \bar{J}(y) S_F(x-y),$$

$$i\frac{\delta}{\delta \bar{J}(x)} Z_0 = Z_0 \int d^4y S_F(x-y) J(y).$$

Le linee hanno una freccia che ne indica il verso di percorrenza, per convenzione si sceglie la linea uscente come quella che corrisponde a \bar{J} mentre entrante se corrisponde a J ;

- Linee fermioniche interne: l'azione di una seconda derivata funzionale comporta la creazione di una linea interna in cui si propaga un fermione (non consideriamo il termine in cui deriviamo nuovamente

Z_0 perchè non produce linee interne)

$$\begin{aligned} \left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\left(i\frac{\delta}{\delta \bar{J}(x)}\right)Z_0 &= -iZ_0 S_F(x-y); \\ \left(i\frac{\delta}{\delta \bar{J}(x)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)Z_0 &= iZ_0 S_F(x-y). \end{aligned}$$

Anche le linee interne hanno il loro verso di percorrenza, come nel caso delle linee esterne;

- Linea fotonica esterna: l'azione di una derivata funzionale rispetto a J_μ su Z_0 produce una linea esterna di tipo fotonico

$$i\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}Z_0 = Z_0 \int d^4y J^\mu(y) \Delta_F(x-y, 0).$$

Le linee fotoniche sono indicate in maniera ondulata;

- Linea fotonica interna: l'azione di una seconda derivata funzionale comporta la creazione di una linea interna in cui si propaga un fotone (non consideriamo il termine in cui deriviamo nuovamente Z_0 perchè non produce linee interne)

$$\left(i\frac{\delta}{\delta J_\nu(x)}\right)\left(i\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\right)Z_0 = -iZ_0 \eta^{\mu\nu} \Delta_F(x-y, 0)$$

- Esistono due vertici: il vertice di interazione in cui compare la costante di accoppiamento e_0 ed il vertice di controtermine di massa.

Dall'elenco appena fatto è possibile derivare le regole di Feynman per il funzionale generatore (ossia per i propagatori) nello spazio degli impulsi. Le linee interne corrispondono ai propagatori (moltiplicati per una costante inessenziale che per altro vale 1 quando si pone $\mathbf{J} = 0$):

- linea fotonica interna: nello spazio degli impulsi corrisponde a (nella gauge di Feynman)

$$-i\frac{\eta^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon};$$

- linea fermionica interna: nello spazio degli impulsi corrisponde a

$$\pm i\frac{\not{p} + m_0}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon};$$

- linea fermionica e fotoniche esterne: abbiamo sempre due casi di linee fermioniche (la linea associata a J e quella associata a \bar{J}) ed un solo caso di linea fotonica. Queste linee convergono in un vertice di interazione la cui coordinata deve essere integrata (intuitivamente, la posizione dell'interazione è arbitraria e quindi sommiamo su tutte le posizioni possibili); poichè ogni linea "trasporta" un certo impulso (l'impulso della particella che percorre la linea) l'integrazione sul vertice produce un fattore $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p_i)$ che restituisce la conservazione del quadrimomento ad ogni vertice.

7.2 Rappresentazione spettrale e formule di riduzione

In questa sezione vogliamo ritrovare la rappresentazione spettrale della funzione di Green a due punti che abbiamo studiato nel caso del campo scalare; le differenze come vedremo sono minime. Il procedimento per ricavare le rappresentazioni di Källén-Lehmann nel caso dei campi di Dirac e fotonico è molto simile al caso del campo scalare. Successivamente specializzeremo le formule LSZ al caso della spQED.

7.2.1 La rappresentazione di Källén-Lehmann per il campo di Dirac

Consideriamo la funzione di Green a due punti nel caso di $x^0 > 0$

$$\langle 0|\mathcal{T}[\psi(x)\bar{\psi}(0)]|0\rangle = \langle 0|\phi(x)\bar{\psi}(0)|0\rangle_{1 \text{ part.}} + \langle 0|\phi(x)\bar{\psi}(0)|0\rangle_{\text{piu' part.}} \cdot$$

il contributo ad una particella si scrive come

$$\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(0)|0\rangle_{1 \text{ part.}} = \sum_s \int d\mathbf{p} \langle 0|\psi(x)|\mathbf{p}, s\rangle \langle s, \mathbf{p}|\bar{\psi}(0)|0\rangle;$$

il primo pezzo dell'integrando si può riscrivere come $\langle 0|\psi(x)|\mathbf{p}, s\rangle = \langle 0|e^{i\hat{p}x}\psi(0)e^{-i\hat{p}x}|\mathbf{p}, s\rangle = e^{-ipx} \langle 0|\psi(0)|\mathbf{p}, s\rangle$. A questo punto il generico elemento di matrice $\langle 0|\psi(0)|\mathbf{p}, s\rangle$ viene parametrizzato in analogia con il campo libero come $\langle 0|\psi(0)|\mathbf{p}\rangle = \frac{\sqrt{Z_2(p)m}}{\sqrt{(2\pi)^3 E_{\mathbf{p}}}} u_{\mathbf{p}}^s$, da cui otteniamo

$$\begin{aligned} \langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(0)|0\rangle_{1 \text{ part.}} &= \sum_s \int d\mathbf{p} \frac{Z_2(p)m}{(2\pi)^3 E_{\mathbf{p}}} (u_{\mathbf{p}}^s \bar{u}_{\mathbf{p}}^s) e^{-ipx} = \int d\mathbf{p} \frac{Z_2(p)m}{(2\pi)^3 E_{\mathbf{p}}} \frac{\not{p} + m}{2m} e^{-ipx} = \\ &= (i\not{\partial} + m) \int d\mathbf{p} \frac{Z_2(p)}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} e^{-ipx}. \end{aligned}$$

Dall'invarianza di Lorentz del propagatore, segue che deve esserlo anche la funzione $Z(p)$ che sarà quindi funzione dell'unico invariante relativistico costruibile a partire dal quadrimpulso, ossia $Z_2(p) := Z_2(m^2)$ (ossia funzione dalla massa costante della particella corrispondente allo stato ad una particella). Ricordando che la (2.1) vale per $x^0 > 0$ e svolgendo lo stesso conto nel caso $x^0 < 0$ si ottiene

$$\langle 0|\mathcal{T}[\psi(x)\bar{\psi}(0)]|0\rangle_{1 \text{ part.}} = Z_2(m^2) \left[(i\not{\partial} + m) \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} e^{-ipx} \left(e^{iE_{\mathbf{p}}x^0} \theta(x^0) + e^{-iE_{\mathbf{p}}x^0} \theta(-x^0) \right) \right]; \quad (7.3)$$

in cui riconosciamo il propagatore fermionico.

Consideriamo, ora, il contributo a più particelle. Nel caso $x^0 > 0$ abbiamo che il contributo a più particelle si può scrivere come

$$\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(0)|0\rangle_{\text{piu' part.}} = \sum_i \langle 0|\psi(x)|i\rangle \langle i|\bar{\psi}(0)|0\rangle,$$

in cui con i indichiamo tutto il set di numeri quantici dello stato a multiparticelle compreso l'impulso totale dello stato, P_i . Come in precedenza, $\langle 0|e^{i\hat{P}x}\psi(0)e^{-i\hat{P}x}|i\rangle$ in cui, questa volta, \hat{P} indica l'operatore di impulso totale. Mettendo assieme si ha

$$\begin{aligned} \langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(0)|0\rangle_{\text{piu' part.}} &= \sum_i \langle 0|e^{i\hat{P}x}\psi(0)e^{-i\hat{P}x}|i\rangle \langle i|\bar{\psi}(0)|0\rangle = \\ &= \sum_i e^{-i\hat{P}_i x} \langle 0|\psi(0)|i\rangle \langle i|\bar{\psi}(0)|0\rangle; \end{aligned}$$

inseriamo nella precedente due funzioni delta scritte come identità:

$$\int dM^2 \delta(p^2 - M^2) = 1;$$

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(p - P_i) = 1,$$

ottenendo

$$\begin{aligned} & \sum_i e^{-i\hat{P}_i x} \langle 0 | \psi(0) | i \rangle \langle i | \bar{\psi}(0) | 0 \rangle = \\ & = \int dM^2 \delta(p^2 - M^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \sum_i e^{-iP_i x} (2\pi)^4 \delta(p - P_i) \langle 0 | \psi(0) | i \rangle \langle i | \bar{\psi}(0) | 0 \rangle = \\ & = \int dM^2 \delta(p^2 - M^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \sum_i (2\pi)^4 \delta(p - P_i) \langle 0 | \psi(0) | i \rangle \langle i | \bar{\psi}(0) | 0 \rangle . \end{aligned}$$

Il fatto fondamentale è, anche qui, che la somma sugli stati deve dare una funzione del quadrimpulso che è Lorentz-invariante, quindi deve essere necessariamente una funzione di p^2 e quindi, stando alla prima delta, di M^2 . Definiamo due funzioni spettrali, date dalla relazione

$$i\cancel{\rho}_1(M^2) + M\rho_2(M^2) := \delta(p^2 - M^2) \sum_i (2\pi)^4 \delta(p - P_i) \langle 0 | \psi(0) | i \rangle \langle i | \bar{\psi}(0) | 0 \rangle \quad (7.4)$$

per cui possiamo scrivere

$$\begin{aligned} & \sum_i e^{-i\hat{P}_i x} \langle 0 | \psi(0) | i \rangle \langle i | \bar{\psi}(0) | 0 \rangle = \int dM^2 [i\cancel{\rho}_1(M^2) + M\rho_2(M^2)] \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} = \\ & = \int dM^2 [i\cancel{\rho}_1(M^2) + M\rho_2(M^2)] \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{2E_{\mathbf{p},M}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} e^{iE_{\mathbf{p},M}x^0}. \end{aligned}$$

Considerando anche il caso $x^0 < 0$, rifacendo gli stessi conti si ottiene che il contributo a più particelle si scrive come

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \mathcal{T}[\psi(x)\bar{\psi}(0)] | 0 \rangle_{\text{piu' part.}} = \\ & = \int dM^2 [i\cancel{\rho}_1(M^2) + M\rho_2(M^2)] \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{2E_{\mathbf{p},M}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} (e^{iE_{\mathbf{p},M}x^0} \theta(x^0) + e^{-iE_{\mathbf{p},M}x^0} \theta(-x^0)). \end{aligned} \quad (7.5)$$

In definitiva mettendo assieme la (7.3) e la (7.5)

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \mathcal{T}[\psi(x)\bar{\psi}(0)] | 0 \rangle = \langle 0 | \mathcal{T}[\psi(x)\bar{\psi}(0)] | 0 \rangle_{\text{1 part.}} + \langle 0 | \mathcal{T}[\psi(x)\bar{\psi}(0)] | 0 \rangle_{\text{piu' part.}} = \\ & = iZ_2(m^2)S_F(x, m) + i \int_{M_s}^{\infty} dM^2 [i\cancel{\rho}_1(M^2) + M\rho_2(M^2)] \Delta_F(x, M) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \mathcal{F}(\langle 0 | \mathcal{T}[\psi(x)\bar{\psi}(0)] | 0 \rangle) = \frac{iZ_2(m^2)}{\not{p} - m} + i \int_{M_s}^{\infty} dM^2 \frac{i\cancel{\rho}_1(M^2) + M\rho_2(M^2)}{p^2 - M^2} \end{aligned} \quad (7.6)$$

otteniamo la rappresentazione di Källén-Lehmann per il campo di Dirac. Il dover definire due funzioni spettrali è semplicemente frutto della richiesta di avere qualcosa che assomigli al propagatore fermionico nel termine a più particelle. L'interpretazione analitica è la stessa del caso scalare.

7.2.2 La rappresentazione di Källén-Lehmann per il campo fotonico

Per derivare la rappresentazione di Källén-Lehmann del campo fotonico dovremmo ripetere i passaggi eseguiti nel caso del campo scalare e del campo spinoriale di Dirac con solo alcune piccole accortezze. Non eseguiremo di nuovo tutti i calcoli ma diamo il risultato conclusivo

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | \mathcal{T}[A_\mu(x)A_\nu(0)] | 0 \rangle = \langle 0 | \mathcal{T}[A_\mu(x)A_\nu(0)] | 0 \rangle_{1 \text{ part.}} + \langle 0 | \mathcal{T}[A_\mu(x)A_\nu(0)] | 0 \rangle_{\text{piv' part.}} = \\
& = -iZ_3(m^2)\eta_{\mu\nu}\Delta_F(x, 0) - i\eta_{\mu\nu} \int_{M_s}^{\infty} dM^2 \zeta(M^2)\Delta_F(x, M) \Rightarrow \\
& \Rightarrow \mathcal{F}(\langle 0 | \mathcal{T}[\psi(x)\bar{\psi}(0)] | 0 \rangle) = \frac{-iZ_3(m^2)\eta_{\mu\nu}}{p^2} - i\eta_{\mu\nu} \int_{M_s}^{\infty} dM^2 \frac{\zeta(M^2)}{p^2 - M^2}.
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Le considerazioni sono le stesse dei casi precedenti.

7.2.3 Formule di riduzione per la spQED

In questa sezione, con riferimento al paragrafo 3.3.1, specializzeremo le formule di riduzione al caso dell'elettrodinamica quantistica spinoriale. Consideriamo uno stato iniziale con l_f fermioni, l_a antifermioni e l_b bosoni del campo EM ed uno stato finale con n_f fermioni, n_a antifermioni e n_b bosoni del campo EM; l'elemento di matrice di scattering tra questi generici stati è $S_{\beta\alpha} = \langle \alpha, out, n_f, n_a, n_b | l_b, l_a, l_f, in, \beta \rangle$.

Nel caso del campo fotonico abbiamo che $K = \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}}$, $\mathcal{P}(x) = \partial_\mu \delta^\mu = \square$ (nella gauge appropriata); inoltre essendo il fotone la sua stessa antiparticella $u_{\mathbf{p}}^s = v_{\mathbf{p}}^s = \epsilon^\mu(\mathbf{p}, s)$ e $u_{\mathbf{p}}^{\dagger s} = v_{\mathbf{p}}^{\dagger s} = \epsilon^{*\mu}(\mathbf{p}, s)$. Nel caso di campo fermionico di Dirac, abbiamo che $K = \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E_{\mathbf{p}}}}$, $\mathcal{P}(x) = i\not{\partial} - m$ e si ha che $u_{\mathbf{p}}^s$ e $u_{\mathbf{p}}^{\dagger s}$ sono gli spinori per le particelle mentre $v_{\mathbf{p}}^s$ e $v_{\mathbf{p}}^{\dagger s}$ sono gli spinori per le antiparticelle. Mettendo assieme queste informazioni possiamo scrivere il generico elemento di matrice di scattering nello spazio degli impulsi come (guardando la (3.26)):

$$\begin{aligned}
& S_{\beta\alpha} = \langle \alpha, out, n_f, n_a, n_b | l_b, l_a, l_f, in, \beta \rangle = \\
& = \prod_{bos \ in} \sqrt{\frac{1}{Z_3(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}} \prod_{ferm \ e \ antiferm \ in} \sqrt{\frac{m}{Z_2(2\pi)^3 E_{\mathbf{p}}}} \times \\
& \times \prod_{bos \ out} \sqrt{\frac{1}{Z_3(2\pi)^3 2E_{\mathbf{q}}}} \prod_{ferm \ e \ antiferm \ out} \sqrt{\frac{m}{Z_2(2\pi)^3 E_{\mathbf{q}}}} \times \\
& \times \prod_{ferm \ in} -(\not{p} + m)u_{\mathbf{p}}^s \prod_{ferm \ out} \bar{u}_{\mathbf{q}}^\sigma(\not{q} - m) \prod_{antiferm \ in} \bar{v}_{\mathbf{p}}^s(\not{p} - m) \prod_{antiferm \ out} -(\not{q} + m)v_{\mathbf{q}}^\sigma \times \\
& \times \prod_{bos \ in} -p^2 \epsilon^\mu(\mathbf{p}, s) \prod_{bos \ out} \epsilon^{*\mu}(\mathbf{q}, \sigma) q^2 \times \\
& \times \tilde{G}(q_1, \dots, q_n, -p_1, \dots, -p_l);
\end{aligned} \tag{7.8}$$

in cui si sottointende il limite on shell. Anche qui il concetto di base è lo stesso espresso nella sezione generale sulle formule LSZ. Dalla (7.8) vediamo che:

- Ad ogni fermione entrante è associato $u_{\mathbf{p}}^s$;
- Ad ogni fermione uscente è associato $\bar{u}_{\mathbf{q}}^s$;
- Ad ogni antifermione entrante è associato $\bar{v}_{\mathbf{p}}^\sigma$;

- Ad ogni antifermione uscente è associato v_q^σ ;
- Ad ogni bosone entrante $\epsilon^\mu(\mathbf{p}, s)$;
- Ad ogni bosone uscente $\epsilon^{*\mu}(\mathbf{q}, \sigma)$.

7.3 Identità di Ward-Takahashi per la spQED

Veniamo, ora, alla riscrittura dell'identità di Ward nel caso della spQED. Nell'elettrodinamica la densità di lagrangiana è invariante sotto trasformazioni infinitesime $\delta\psi(x) = iq\psi(x)$ e $\delta\bar{\psi}(x) = -iq\bar{\psi}(x)$. Consideriamo la (6.15) nel caso di due campi fermionici ed in cui sopponiamo la trasformazione di simmetria appena scritta

$$\begin{aligned}
i\partial_\mu < 0 | \mathcal{T} [j^\mu(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)] | 0 > = \\
= iq < 0 | \mathcal{T} [\psi(x_1) \delta^{(4)}(x - x_1) \bar{\psi}(x_2)] | 0 > - iq < 0 | \mathcal{T} [\psi(x_1) \delta^{(4)}(x - x_2) \bar{\psi}(x_2)] | 0 > = \\
= iq [\delta^{(4)}(x - x_1) - \delta^{(4)}(x - x_2)] < 0 | \mathcal{T} [\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)] | 0 >;
\end{aligned} \tag{7.9}$$

a questo punto eseguiamo una trasformata di Fourier nelle variabili x , x_1 e x_2 . Il secondo membro diventa (ricordando che $< 0 | \mathcal{T} [\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)] | 0 > = iS_F(x_1 - x_2)$)

$$\begin{aligned}
- \int \int \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 e^{-ipx} e^{-ikx_1} e^{isx_2} q [\delta^{(4)}(x - x_1) - \delta^{(4)}(x - x_2)] S_F(x_1 - x_2) = \\
= -q \int \int d^4x_1 d^4x_2 e^{-i(p+k)x_1} e^{isx_2} S_F(x_1 - x_2) + q \int \int d^4x_1 d^4x_2 e^{-i(p-s)x_2} e^{-ikx_1} S_F(x_1 - x_2) = \\
= -q \int \int d^4y d^4z e^{-i(p+k)(z+y)} e^{isy} S_F(z) + q \int \int d^4y d^4z e^{-i(p-s)y} e^{-ik(z+y)} S_F(z) = \\
= -q \int d^4y e^{-i(p+k-s)y} \int d^4z e^{-i(p+k)z} S_F(z) + q \int d^4y e^{-i(p-s+k)y} \int d^4z e^{-ikz} S_F(z) = \\
= -q(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + k - s) (\tilde{S}_F(s) - \tilde{S}_F(k)),
\end{aligned} \tag{7.10}$$

in cui si è utilizzato il cambio di variabili di jacobiano unitario $x_1 - x_2 = z$, $x_2 = y$. Per quanto riguarda il primo membro dell'identità di Ward scritta all'inizio del paragrafo, questo è una funzione di Green esatta a tre punti a cui contribuiscono i grafici della Figura (7.1).

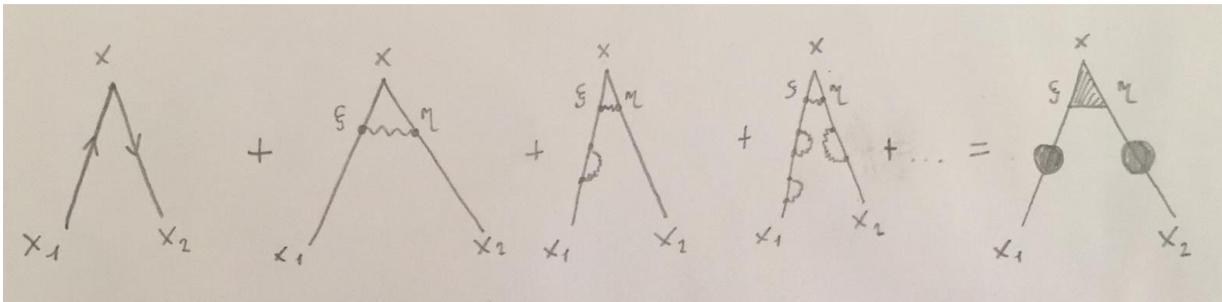


Figura 7.1: *Diagrammi di Feynman che rappresentano la funzione di Green a tre punti nel primo membro dell'identità di Ward (7.9). Il primo diagramma dalla sinistra è il caso di nessuna correzione; i diagrammi successivi tengono conto delle correzioni sia alle linee esterne che al vertice stesso. La somma delle correzioni sulle linee esterne ricostruisce il propagatore esatto mentre la somma delle correzioni al vertice la funzione di vertice $\Gamma^\mu(\xi - x, x - \eta)$.*

Per ciascuna linea esterna, le correzioni dovute all'interazione ricostruiscono il propagatore esatto a due punti, mentre le correzioni al vertice formano un 1PI sul vertice stesso che chiameremo nella sua totalità $\Gamma^\mu(\xi - x, x - \eta)$. La funzione di Green a tre punti si scriverà (dobbiamo integrare sulle coordinate dalla correzione del vertice)

$$\langle 0 | \mathcal{T} [j^\mu(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)] | 0 \rangle = - \int d^4\xi \int d^4\eta S_F(x_1 - \xi) \Gamma^\mu(\xi - x, x - \eta) S_F(\eta - x_2).$$

Eseguendo la stessa trasformata di Fourier fatta nel caso del secondo membro della (7.8) si ottiene

$$\begin{aligned} & \int \int \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 e^{-ipx} e^{-ikx_1} e^{isx_2} i \partial_\mu \langle 0 | \mathcal{T} [j^\mu(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)] | 0 \rangle = \\ & = -i \int \int \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 e^{-ipx} e^{-ikx_1} e^{isx_2} \frac{d}{dx^\mu} \left(- \int d^4\xi \int d^4\eta S_F(x_1 - \xi) \Gamma^\mu(\xi - x, x - \eta) S_F(\eta - x_2) \right) = \\ & = -i \int \int \int d^4x d^4y d^4z e^{-ipx} e^{-ik(y+\xi)} e^{is(-z+\eta)} \left(- \int \int d^4\xi d^4\eta S_F(y) \frac{d}{dx^\mu} (\Gamma^\mu(\xi - x, x - \eta)) S_F(z) \right) = \\ & = -i \int d^4x e^{-ipx} \int d^4y e^{-iky} S_F(y) e^{-ik\xi} \int d^4z e^{-isz} S_F(z) e^{is\eta} \left(- \int \int d^4\xi d^4\eta \frac{d}{dx^\mu} \Gamma^\mu(\xi - x, x - \eta) \right) = \\ & = -i \int d^4x e^{-ipx} \tilde{S}_F(k) \tilde{S}_F(s) e^{ik\xi} e^{is\eta} \left(- \int \int d^4\xi d^4\eta \frac{d}{dx^\mu} \Gamma^\mu(\xi - x, x - \eta) \right) = \\ & = -i \int d^4x e^{-ipx} \tilde{S}_F(k) \tilde{S}_F(s) \int \int d^4y_1 d^4z_1 \frac{d}{dx^\mu} e^{-ik(y_1+x)} e^{is(-z_1+x)} \Gamma^\mu(y_1, z_1) = \\ & = -i \int d^4x e^{-ipx} \tilde{S}_F(k) \tilde{S}_F(s) \tilde{\Gamma}^\mu(k, s) \frac{d}{dx^\mu} \left(e^{-i(k-s)x} \right) = \\ & = -i \int d^4x e^{-ipx} \tilde{S}_F(k) \tilde{S}_F(s) \tilde{\Gamma}^\mu(k, s) (-i(k-s)_\mu) e^{-i(k-s)x} = \\ & = -(k-s)_\mu (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-s) \tilde{S}_F(k) \tilde{\Gamma}^\mu(k, s) \tilde{S}_F(s) = \\ & = (s-k)_\mu (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-s) \tilde{S}_F(k) \tilde{\Gamma}^\mu(k, s) \tilde{S}_F(s), \end{aligned} \tag{7.11}$$

in cui abbiamo utilizzato prima il cambio di variabili $y = x_1 - \xi$, $z = \eta - x_2$ e poi il cambio di variabili $\xi - x = y_1$, $x - \eta = z_1$. Eguagliando la (7.10) e la (7.11) si ottiene

$$\begin{aligned} (s-k)_\mu (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-s) \tilde{S}_F(k) \tilde{\Gamma}^\mu(k, s) \tilde{S}_F(s) &= -q (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-s) (\tilde{S}_F(s) - \tilde{S}_F(k)) \Rightarrow \\ \Rightarrow (s-k)_\mu \tilde{S}_F(k) \tilde{\Gamma}^\mu(k, s) \tilde{S}_F(s) &= -q (\tilde{S}_F(s) - \tilde{S}_F(k)) \Rightarrow (s-k)_\mu \tilde{\Gamma}^\mu(k, s) = -q (\tilde{S}_F^{-1}(k) - \tilde{S}_F^{-1}(s)); \end{aligned}$$

se consideriamo il caso di $s = k + \epsilon$ otteniamo

$$\epsilon_\mu \tilde{\Gamma}^\mu(k, k + \epsilon) = -q \left(\tilde{S}_F^{-1}(k) - \tilde{S}_F^{-1}(k) - \frac{\partial \tilde{S}_F^{-1}(k)}{\partial k_\mu} \epsilon_\mu \right) \Rightarrow \tilde{\Gamma}^\mu(k, k + \epsilon) = q \frac{\partial \tilde{S}_F^{-1}(k)}{\partial k_\mu}$$

Scrivendo la funzione di vertice come il termine senza correzioni e il termine con le correzioni quantistiche abbiamo $\tilde{\Gamma}^\mu(k, s) = \gamma^\mu + \Lambda^\mu(k, s)$; inoltre l'inverso del propagatore può essere scritto come il termine privo di correzioni più il termine di correzioni (detto di autoenergia) $\tilde{S}_F^{-1}(k) = \not{k} - m + \Sigma(k)$ (questo si può vedere considerando una serie infinita di correzioni 1PI che si risomma come serie geometrica). Mettendo assieme e considerando che al vertice è sempre associata la carica abbiamo

$$\tilde{\Gamma}^\mu(k, k + \epsilon) = q(\gamma^\mu + \Lambda^\mu(k, k + \epsilon)) = q \frac{\partial \tilde{S}_F^{-1}(k)}{\partial k_\mu} = q \frac{\partial}{\partial k_\mu} (k_\mu \gamma^\mu - m + \Sigma(k)) \Rightarrow \Lambda^\mu(k, k + \epsilon) = \frac{\partial \Sigma(k)}{\partial k_\mu}. \tag{7.12}$$

La (7.12) ci dice che le correzioni al vertice sono dipendenti dalle correzioni di autoenergia delle linee esterne.

7.4 Diagrammi di Feynman per la matrice di scattering

In questa sezione vedremo le regole di Feynman per la matrice S nei processi della spQED ed il punto di partenza sono le formule di riduzione della sezione 7.2.3. Con riferimento alla sezione 3.3.2, sappiamo che il propagatore esatto (ricostruito su ogni linea esterna) nello spazio degli impulsi è dato (grazie alla rappresentazione spettrale) dal prodotto tra un elemento di matrice 1PI sulle linee esterne e un prodotto di termini che contengono una costante di rinormalizzazione per ogni particella (Z_2 per i fermioni e Z_3 per i fotoni) e il propagatore associato ad ogni particella. Stando alla formula (7.8) dobbiamo inserire la trasformata di Fourier del propagatore a $n + l = n_b + n_a + n_f + l_b + l_a + l_f$ punti e prendere il limite on shell di ogni particella; questo ci restituisce l'elemento di matrice di scattering:

$$S_{\beta\alpha} = \langle \alpha, out, n | l, in, \beta \rangle = \prod_{ferm \ e \ antiferm} \sqrt{\frac{mZ_2}{(2\pi)^3 E_{\mathbf{p}}}} \prod_{bos} \sqrt{\frac{Z_3}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}}} (2\pi)^4 i \delta \left(\sum_i p_i - \sum_i q_i \right) \mathcal{M}_{\beta\alpha}; \quad (7.13)$$

l'elemento di matrice ridotto $\mathcal{M}_{\beta\alpha}$ tiene conto del diagramma amputato centrale del propagatore a $n + l$ punti e degli altri fattori non costanti (come gli spinori o i vettori di polarizzazione dei fotoni). Prima di poter dare la lista delle regole per il calcolo dell'elemento di matrice ridotto partendo dai diagrammi, dobbiamo trattare due aspetti: i loop fermionici e la combinatoria. I loop si riconoscono perchè seguendo la linea fermionica si torna al punto di partenza. Generalmente si ordinano i campi (e quindi le derivate funzionali) in modo da avere valore di aspettazione nullo sul vuoto (a meno di una costante che, seppur infinita, è irrilevante). Questo tipo di ordinamento, in cui vengono messi i campi dagati o aggiunti a sinistra e gli altri a destra prende il nome di ordinamento normale. Nel caso di una linea esterna, con questo ordinamento, ci troviamo a valutare sempre prima la derivata funzionale rispetto a \bar{J} e poi quella rispetto a J ; stando alle formule della sezione 7.1 prendere le derivate in questa sequenza produce sempre un $+1$ qualunque sia il numero delle derivate fatte. Nel caso di un loop, invece, dovendo chiudere la linea (e quindi la somma sugli indici spinoriali) ci ritroviamo col dover valutare un numero dispari di sequenze di derivate funzionali in cui abbiamo prima la derivata rispetto a J e poi quella rispetto a \bar{J} ; questo produce un -1 totale.

Veniamo alla combinatoria; sappiamo che il funzionale generatore viene espresso con una serie infinita (la (7.2)) per cui i diagrammi con n vertici vengono prodotti dal termine n -esimo dello sviluppo in cui compare il fattore $\frac{1}{n!}$. Poichè nei vertici compaiono derivate funzionali rispetto a campi diversi, gli n vertici hanno ruoli unici e quindi, all'ordine n si hanno $n!$ modi per assegnare gli n ruoli agli n vertici. In conclusione non abbiamo problemi di combinatoria, non dobbiamo preoccuparcene.

Enunciamo, finalmente, le regole di Feynman per la matrice ridotta per la teoria spQED:

- Al vertice fermione (antifermione) fotone è associato il termine $ie\gamma^\mu$;
- Al vertice di controtermine di massa è associato il termine $i\delta m$;
- Alla linea fermionica o antofermionica interna è associato il propagatore $i \frac{\not{k} + m_0}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon}$;
- Alla linea interna fotonica è associato il propagatore $-i \frac{\eta^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$;
- Ad ogni fermione entrante è associato $u_{\mathbf{p}}^s$;
- Ad ogni fermione uscente è associato $\bar{u}_{\mathbf{q}}^s$;
- Ad ogni antifermione entrante è associato $\bar{v}_{\mathbf{p}}^\sigma$;
- Ad ogni antifermione uscente è associato $v_{\mathbf{q}}^\sigma$;

- Ad ogni bosone entrante $\epsilon^\mu(\mathbf{p}, s)$;
- Ad ogni bosone uscente $\epsilon^{*\mu}(\mathbf{q}, \sigma)$.
- Ad ogni loop fermionico è associato un fattore -1 in più.

È importante notare un paio di altre cose: le linee fermioniche aperte vanno scritte partendo da una linea uscente (che può rappresentare un fermione uscente o un antifermione entrante) finendo con la linea entrante (che rappresenta un fermione entrante o un antifermione uscente); quindi la regola è seguire la linea partendo dalla fine; se la linea è chiusa (un loop) è indifferente il senso di percorrenza (dato che tutti gli indici spinoriali sono saturati ed il primo è saturato con l'ultimo si ha una traccia che è invariante per permutazioni).

Facciamo un esempio: il caso del propagatore a 4 punti $G = \langle 0 | \mathcal{T}[\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)A^\mu(y_1)A^\nu(y_2)] | 0 \rangle$ al secondo ordine. A questo ordine abbiamo due vertici di interazione e, dato che è il propagatore a 4 punti, 4 derivate funzionali da fare agire sullo sviluppo del funzionale generatore; abbiamo un totale di 10 derivate funzionali di cui 4 rispetto alle J^α , 3 rispetto a \bar{J} e 3 rispetto a J . Per quanto detto ora, si può vedere che i diagrammi devono avere 3 linee fermioniche e 2 fotoniche (che possono essere interne o esterne); i diagrammi sono riportati in Figura 7.2.

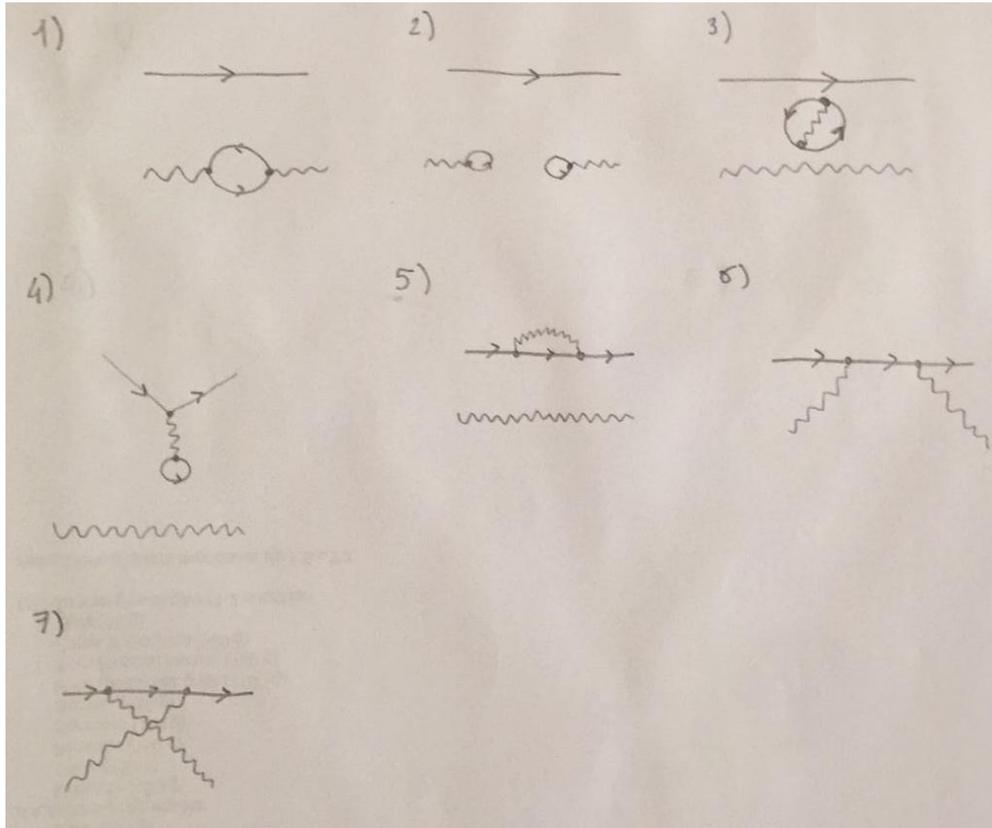


Figura 7.2: Diagrammi di Feynman che rappresentano la funzione di Green a quattro punti al secondo ordine perturbativo. I diagrammi dal 1) al 5) sono disconnessi e non contribuiscono al calcolo del propagatore. Essi contengono correzioni ai propagatori fermionico e fotonico (primo e quinto diagramma), e una correzione all'ampiezza vuoto-vuoto (terzo diagramma). Il secondo ed il quarto diagramma hanno ampiezza identicamente nulle per via della simmetria dell'integrando. Gli unici diagrammi che contribuiscono ad un processo di scattering sono gli ultimi due, nello specifico rappresentano la diffusione Compton.

Gli unici diagrammi che contribuiscono effettivamente al calcolo del propagatore (una volta diviso per $Z[0]$) sono i diagrammi completamente connessi, ossia gli ultimi due che rappresentano la diffusione Compton. È interessante notare che il secondo e quarto diagramma hanno ampiezza identicamente nulla per via della simmetria dell'integrando; più in generale, data questa la simmetria sotto coniugazione di carica della spQED, i diagrammi con un numero dispari di fotoni esterni sono identicamente nulli (questa asserzione prende il nome di teorema di Furry ed è discusso brevemente in **Appendice E**).

Utilizzando le regole di Feynman scriviamo le ampiezze associate ai diagrammi 6) e 7) nel caso di scattering con antifermioni:

$$6) \Rightarrow \mathcal{M}_{\beta\alpha} = \bar{u}_{\mathbf{p}_2}^{s_2} \epsilon^{*\mu}(\mathbf{q}_1, \sigma_1) (ie\gamma_\mu) \left(i \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right) (ie\gamma_\nu) \epsilon^\nu(\mathbf{p}_1, s_1) u_{\mathbf{q}_2}^{\sigma_2};$$

$$7) \Rightarrow \mathcal{M}_{\beta\alpha} = \bar{u}_{\mathbf{p}_2}^{s_2} \epsilon^\mu(\mathbf{p}_1, s_1) (ie\gamma_\mu) \left(i \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right) (ie\gamma_\nu) \epsilon^{*\nu}(\mathbf{q}_1, \sigma_1) u_{\mathbf{q}_2}^{\sigma_2},$$

in cui \not{k} è l'impulso della particella propagata, ed è pari alla somma degli impulsi entranti (equivalentemente di quelli uscenti).

7.5 Fotoni virtuali

L'interazione tra il campo di Dirac e il campo EM avviene tramite la densità di lagrangiana $\mathcal{L}_{int} = e_0 A^\mu(x) j_\mu(x)$ in cui $j_\mu(x)$ è la corrente vettoriale del campo di Dirac (che è conservata per il teorema di Noether). Immaginiamo di calcolare il seguente elemento di matrice nello spazio dei momenti

$$S_{fi} = (ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{j}_\mu(-p) \frac{i}{p^2 + i\epsilon} \left[-\eta^{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right] \tilde{j}_\nu(p); \quad (7.14)$$

questo elemento di matrice è dato dall'interazione di due correnti EM che, nell'interazione, si scambiano un fotone che è detto virtuale (in generale le particelle corrispondenti a linee interne ai diagrammi sono dette virtuali perchè non sono necessariamente on shell). Una conseguenza della (7.14) è che l'elemento di matrice di scattering non dipende dalla gauge scelta: il termine contenente il parametro della gauge contiene anche il prodotto $p^\mu p^\nu$ che si annulla identicamente dato che, nello spazio degli impulsi la legge di conservazione della corrente di Noether si scrive $p^\mu \tilde{j}_\mu = 0$. Per cui riscriviamo l'elemento (7.14) tralasciando il termine contenente il parametro della gauge

$$S_{fi} = (ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{j}_\mu(-p) \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} \tilde{j}_\nu(p). \quad (7.15)$$

Nella (7.15) notiamo, apparentemente come vedremo, la dipendenza da tutti gli stati di polarizzazione anche quelli longitudinali che sono non fisici. Quanto detto si vede perchè il residuo posto nel polo $p^2 = 0$ è proporzionale alla metrica di Minkowski, la quale, scegliendo una base dei vettori di polarizzazione della forma $\epsilon_0^\mu = (1, 0, 0, 0)$, $\epsilon_1^\mu = (0, 1, 0, 0)$, $\epsilon_2^\mu = (0, 0, 1, 0)$, $\epsilon_3^\mu = (0, 0, 0, 1)$, si scrive come

$$\eta^{\mu\nu} = -\epsilon_0^\mu \epsilon_0^\nu + \epsilon_1^\mu \epsilon_1^\nu + \epsilon_2^\mu \epsilon_2^\nu + \epsilon_3^\mu \epsilon_3^\nu = \sum_{i=1}^2 (\epsilon_i^\mu \epsilon_i^\nu) - \epsilon_0^\mu \epsilon_0^\nu + \epsilon_3^\mu \epsilon_3^\nu,$$

il che sembra, come già detto, lasciare intendere una dipendenza da tutti gli stati di polarizzazione. Esprimiamo ϵ_3 in funzione di $p^\mu = (p^0, 0, 0, p^0)$ e ϵ_0

$$\begin{aligned}\epsilon_3^\mu &= (0, 0, 0, 1) = \frac{1}{p^0}[(p^0, 0, 0, p^0) - p^0(1, 0, 0, 0)] = \frac{1}{|\mathbf{p}|}[(p^0, 0, 0, p^0) - p^0(1, 0, 0, 0)] = \frac{1}{|\mathbf{p}|}(p^\mu - p^0\epsilon_0^\mu) \Rightarrow \\ \Rightarrow \epsilon_3^\mu\epsilon_3^\nu - \epsilon_0^\mu\epsilon_0^\nu &= \frac{1}{|\mathbf{p}|}(p^\mu - p^0\epsilon_0^\mu)\frac{1}{|\mathbf{p}|}(p^\nu - p^0\epsilon_0^\nu) - \epsilon_0^\mu\epsilon_0^\nu = \frac{1}{|\mathbf{p}|^2}(p^\mu p^\nu - p^\mu p^0\epsilon_0^\nu - p^0\epsilon_0^\mu p^\nu + (p^0)^2\epsilon_0^\mu\epsilon_0^\nu) - \epsilon_0^\mu\epsilon_0^\nu = \\ &= \frac{1}{|\mathbf{p}|^2}(p^\mu p^\nu - p^\mu p^0\epsilon_0^\nu - p^0\epsilon_0^\mu p^\nu + (-p^2 + |\mathbf{p}|^2)\epsilon_0^\mu\epsilon_0^\nu) - \epsilon_0^\mu\epsilon_0^\nu = \frac{1}{|\mathbf{p}|^2}(p^\mu p^\nu - p^\mu p^0\epsilon_0^\nu - p^0\epsilon_0^\mu p^\nu - p^2\epsilon_0^\mu\epsilon_0^\nu); \end{aligned}$$

in cui abbiamo usato $p^2 = -(p^0)^2 + |\mathbf{p}|^2$. Usufruento delle relazioni determinate e sostituendo nella (7.15) si ottiene

$$\begin{aligned}S_{fi} &= (ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{j}_\mu(-p) \frac{-i(\sum_i (\epsilon_i^\mu\epsilon_i^\nu) - \epsilon_0^\mu\epsilon_0^\nu + \epsilon_3^\mu\epsilon_3^\nu)}{p^2 + i\epsilon} \tilde{j}_\nu(p) = \\ &= (ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{j}_\mu(-p) \frac{-i(\sum_i \epsilon_i^\mu\epsilon_i^\nu)}{p^2 + i\epsilon} \tilde{j}_\nu(p) + \\ &+ (ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{j}_\mu(-p) \frac{-i\frac{1}{|\mathbf{p}|^2}(p^\mu p^\nu - p^\mu p^0\epsilon_0^\nu - p^0\epsilon_0^\mu p^\nu - p^2\epsilon_0^\mu\epsilon_0^\nu)}{p^2 + i\epsilon} \tilde{j}_\nu(p) = \\ &= (ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{j}_\mu(-p) \frac{-i(\sum_i \epsilon_i^\mu\epsilon_i^\nu)}{p^2 + i\epsilon} \tilde{j}_\nu(p) + (ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{j}_\mu(-p) \frac{-i\frac{1}{|\mathbf{p}|^2}(-p^2\epsilon_0^\mu\epsilon_0^\nu)}{p^2 + i\epsilon} \tilde{j}_\nu(p) = \\ &= (ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{j}_\mu(-p) \frac{-i(\sum_i \epsilon_i^\mu\epsilon_i^\nu)}{p^2 + i\epsilon} \tilde{j}_\nu(p) + (ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{j}_0(-p) \frac{i}{|\mathbf{p}|^2} \tilde{j}_0(p) = \\ &= e^2 \left[\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{j}_\mu(-p) \frac{i(\sum_i \epsilon_i^\mu\epsilon_i^\nu)}{p^2 + i\epsilon} \tilde{j}_\nu(p) + \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{j}_0(-p) \frac{-i}{|\mathbf{p}|^2} \tilde{j}_0(p) \right]. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Il primo addendo della (7.16) contiene i gradi di libertà fisici del campo fotonico ed il polo dipende solo da questi, mentre il secondo rappresenta l'interazione coulombiana istantanea tra le due correnti. Per vedere quest'ultima implicazione manipoliamo il secondo addendo:

$$\begin{aligned}-e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{j}_0(-p) \frac{i}{|\mathbf{p}|^2} \tilde{j}_0(p) &= -ie^2 \int \int \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4x d^4y e^{-ip(x-y)} j_0(y) \frac{1}{|\mathbf{p}|^2} j_0(x) = \\ &= -ie^2 \int \int d^4x d^4y j_0(y) j_0(x) \int \frac{dp^0}{2\pi} e^{ip^0(x_0-y_0)} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{|\mathbf{p}|^2} = \\ &= -ie^2 \int \int d^4x d^4y j_0(y) j_0(x) \delta(x_0 - y_0) \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{|\mathbf{p}|^2}, \end{aligned} \tag{7.17}$$

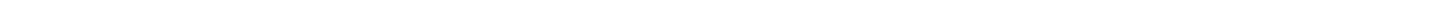
non ci resta che calcolare l'integrale tridimensionale nello spazio degli impulsi; concentriamoci su questo

$$\begin{aligned}\int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{|\mathbf{p}|^2} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) \int_0^\infty |\mathbf{p}|^2 dp \frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{|\mathbf{p}|^2} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) \int_0^\infty dp e^{-ip|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\cos(\theta)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{i|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \int_0^\infty \frac{dp}{p} \int_0^\pi d[\cos(\theta)] e^{-ip|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\cos(\theta)} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{i|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \int_0^\infty \frac{dp}{p} (e^{ip|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} - e^{-ip|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}) = \frac{1}{(2\pi)^2 i|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \int_0^\infty \frac{dp}{p-i\epsilon} (e^{ip|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} - e^{-ip|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}) = \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^2 i|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{p-i\epsilon} (e^{ip|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} - e^{-ip|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}) = \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^2 i|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \left[\int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{p-i\epsilon} e^{ip|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} - \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{p-i\epsilon} e^{-ip|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right] = \frac{2\pi i}{2(2\pi)^2 i|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}; \end{aligned}$$

in cui nel primo passaggio siamo passati in coordinate sferiche; nel secondo passaggio abbiamo espresso il prodotto scalare tramite il prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo compreso tra i due vettori e svolto l'integrale sulla variabile ϕ . Nel terzo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che il differenziale $d[e^{-ip|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\cos(\theta)}] = d\theta(-ip|\mathbf{x}-\mathbf{y}|(-\sin(\theta)))e^{-ip|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\cos(\theta)}$ per riscrivere l'integrale; nel quinto passaggio abbiamo spostato il polo (equivalentemente deformato il contorno di integrazione) per integrare nel piano complesso sfruttando il teorema dei residui in cui dovremo porre poi $\epsilon \rightarrow 0$. Nel valutare i due integrali sul piano complesso, notiamo che solo il primo contribuisce dato che il polo è nel semipiano complesso positivo (posto in $p = i\epsilon$) e solo il primo integrale deve essere chiuso in quel semipiano per il lemma di Jordan; il residuo si calcola come $R(p = i\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{p \rightarrow i\epsilon} (p - i\epsilon) \frac{e^{ip|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{p - i\epsilon} = 1$ e per il teorema dei residui $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{p - i\epsilon} e^{ip|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = 2\pi i$. Inserendo il risultato nella (7.17) otteniamo

$$-ie^2 \int \int d^4x d^4y j_0(y) j_0(x) \delta(x_0 - y_0) \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (7.18)$$

che ricostruisce esattamente l'interazione coulombiana istantanea tra le correnti. La (7.18) ci dice anche due cose particolarmente importanti: in primo luogo ci dice che l'interazione elettromagnetica è mediata da particelle non massive (questo lo sapevamo già) perchè altrimenti comparirebbe un termine esponenziale con all'esponente qualcosa di proporzionale alla massa del mediatore come accade per il potenziale di Yukawa; secondo poi, ci dice che il nostro mondo è a 3 dimensioni spaziali poichè lo stesso conto in dimensione arbitraria fornisce un qualcosa proporzionale a $\frac{1}{r^{d-2}}$ in cui d è il numero di dimensioni spaziali; poichè l'interazione sappiamo avere, sperimentalmente, la forma $\frac{1}{r}$ concludiamo che, per lo meno alla scala di lunghezza che riusciamo ad indagare oggi, il mondo è tridimensionale.



Capitolo 8

Introduzione alla rinormalizzazione: generalità e caso della spQED

La comparsa di infiniti in quantità osservabili era già presente nelle teorie classiche. Consideriamo un elettrone e domandiamoci quanto sia la sua massa; dalla relazione massa energia di Einstein, la massa totale si scrive

$$m_{tot} = m_0 + \int_{r_e}^{\infty} dV \frac{1}{2} E^2 = m_0 + \int_{r_e}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{e^2}{16\pi^2 r^4} 4\pi r^2 dr = m_0 + \frac{e^2}{8\pi r_e} \rightarrow_{(r_e \rightarrow 0)} \infty;$$

è da notare che soltanto la massa totale m_{tot} è accessibile agli esperimenti e chiaramente finita, mentre nulla fissa il valore della massa m_0 dell'elettrone preso singolarmente senza il suo campo. In altri termini, è impossibile sperimentalmente e fisicamente separare un elettrone e isolarlo dal campo elettrostatico che esso stesso genera. Il valore di m_0 risulta quindi libero da ogni vincolo e per cancellare l'infinito si potrebbe fissarlo a un valore infinitamente negativo tale da bilanciare l'infinita energia positiva del campo elettrostatico. La formalizzazione completa di questa procedura guidò la nascita della rinormalizzazione.

In questo capitolo affronteremo lo studio della rinormalizzazione e nello specifico vedremo la rinormalizzazione della spQED trattando le divergenze che compaiono nel calcolo dei propagatori fotonici e fermionici e nel vertice di interazione.

8.1 La rinormalizzazione e la regolarizzazione

Nella teoria delle perturbazioni delle teorie di campo quantistiche, la rinormalizzazione si basa sulla ridefinizione delle costanti di accoppiamento e eventualmente anche dei campi in modo da rimuovere le divergenze almeno in una determinata scala di energia considerata. Le divergenze da eliminare sono contenute negli integrali associati ai diagrammi di Feynman di un certo processo ad un certo ordine; esistono due tipologie di divergenze:

- Divergenza ultravioletta: si ha quando si includono gli impulsi integrati che tendono ad infinito, ad esempio $\int \frac{d^4q}{q^4}$ che utilizzando coordinate ipersferiche è proporzionale a $\int \frac{dq}{q}$ che diverge logicamente;
- Divergenza infrarossa: si ha quando si considerano impulsi tendenti a zero, ad esempio il propagatore del fotone esplose per impulsi che tendono allo zero.

Le divergenze vengono prima classificate ed eliminate forzatamente mediante un'esplicita procedura di regolarizzazione: si procede cioè a una riformulazione matematica della teoria in modo da rendere gli integrali, e quindi le quantità fisiche osservabili, non divergenti. La rinormalizzazione consiste, poi, nel preciso modo di rimuovere la regolarizzazione introdotta e tornare alla teoria originaria avendo cura di mantenere finiti i valori delle quantità fisiche osservabili.

Una procedura comune di regolarizzazione è quella dell'introduzione di un "cutoff" nei momenti integrati. Si tratta di escludere gli impulsi elevati dagli integrali mediante un estremo di integrazione superiore (il cutoff) introdotto artificialmente e arbitrariamente. Le divergenze dell'integrale appaiono quindi come potenze o logaritmi del cutoff e possono essere rimosse ridefinendo (ossia rinormalizzando) i campi e le costanti d'accoppiamento in maniera che dipendano dal valore del cutoff precisamente, in modo da mantenere finiti i valori delle quantità fisiche osservabili. Questa procedura non è l'unica; infatti esistono anche la regolarizzazione su reticolo e la regolarizzazione dimensionale. La regolarizzazione su reticolo tratta lo spazio quadrimensionale continuo discretizzandolo, introducendo un passo reticolare a (di cui si dovrà prendere il limite a zero alla fine); l'utilità di questo tipo di regolarizzazione sta nel fatto che si può utilizzare per compiere calcoli al calcolatore considerando direttamente l'integrale sui cammini, senza il bisogno di espanderlo in diagrammi di Feynman. La regolarizzazione dimensionale consiste, invece, nell'estendere l'integrale divergente ad un numero diverso di dimensioni (generalmente da 4 a $4 - \epsilon$ in cui ϵ è positivo e di cui si prenderà il limite a zero alla fine). Il punto a favore della regolarizzazione dimensionale è che questa non disturba la validità di alcune relazioni come l'identità di Ward-Takahashi ed è, inoltre, l'unico metodo che ha permesso il trattamento in termini perturbativi delle teorie di Yang-Mills (teorie di gauge non abeliane).

L'idea finale della rinormalizzazione è esprimere lo sviluppo perturbativo in termini delle quantità osservabili e non in termini dei parametri spogli che compaiono nella densità di lagrangiana (i quali coincidono con i parametri fisici solo in assenza di interazioni); oltre a questo, la rinormalizzazione, permette di eliminare le divergenze nei calcoli dei diagrammi nascondendo il termine infinito in costanti che si semplificano nei conti.

8.2 I propagatori e il vertice

Cominciamo con lo studio delle divergenze ultraviolette che compaiono nello sviluppo dei propagatori e del vertice di interazione.

8.2.1 Il propagatore fermionico

Cominciamo con lo studio del propagatore fermionico; la lagrangiana di Dirac spoglia ha la fomra

$$\mathcal{L}_{Dirac,s} = \bar{\psi}_s(i\cancel{\partial} - m_0)\psi_s - V_s(\bar{\psi}_s\psi_s), \quad (8.1)$$

in cui il pedice s ci dice che si tratta delle quantità spoglie. Definiamo i campi rinormalizzati e la massa rinormalizzata: $\psi = \frac{1}{\sqrt{Z_2}}\psi_s$, $\bar{\psi} = \frac{1}{\sqrt{Z_2}}\bar{\psi}_s$ e $m = m_0 + \delta m$, che sostituite nella (8.1) danno

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Dirac} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} = Z_2\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - (m - \delta m))\psi - V_s(Z_2\bar{\psi}\psi) = \\ &= Z_2\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - (m - \delta m))\psi - V_s(Z_2\bar{\psi}\psi) + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi - \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi = \\ &= Z_2\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + Z_2\delta m\bar{\psi}\psi - V_s(Z_2\bar{\psi}\psi) + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi - \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi = \\ &= \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + (Z_2 - 1)\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + Z_2\delta m\bar{\psi}\psi - V_s(Z_2\bar{\psi}\psi). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Consideriamo la quantità $\Sigma(\not{k})$, che definiamo come la somma di tutti i grafici correttivi 1PI del propagatore fermionico a due punti (come quelli in figura sottostante).

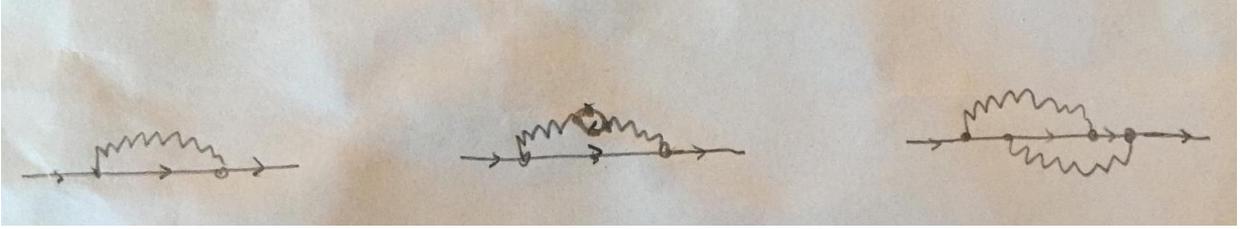


Figura 8.1: Diagrammi di Feynman che rappresentano le correzioni al propagatore fermionico, sono esempi di diagrammi 1PI sulle linee esterne.

Consideriamo il propagatore fermionico esatto a due punti

$$S_{esatto}(\not{k}) = \frac{1}{\not{k} - m + i\epsilon} + \frac{1}{\not{k} - m + i\epsilon}(-\Sigma(\not{k}))\frac{1}{\not{k} - m + i\epsilon} + \dots = \frac{1}{\not{k} - m + i\epsilon + \Sigma(\not{k})} \quad (8.3)$$

in cui si è utilizzata la serie geometrica ed in cui vogliamo che il polo sia in corrispondenza della massa fisica della particella (per via della rappresentazione spettrale esatta). La quantità $\Sigma(\not{k})$ è data dalla somma dei termini di interazioni della (8.2) e dai contributi di loop

$$\Sigma(\not{k}) = (Z_2 - 1)(\not{k} - m) + Z_2\delta m + \Sigma(\not{k})_{LOOP}; \quad (8.4)$$

sviluppamo la correzione attorno al valore m , $\Sigma(\not{k} \rightarrow m) = \Sigma(m) + \frac{d\Sigma(\not{k})}{d\not{k}}|_{\not{k}=m}(\not{k} - m)$ (da notare che gli ordini superiori non contribuiscono al polo e sono nulli quando la particella é messa on shell) ed inseriamola nella (8.3) per ottenere delle relazioni che ci assicurino che il polo sia in corrispondenza della massa della particella e che il residuo in tale polo sia uguale a quello del caso libero

$$S_{esatto}(\not{k} \rightarrow m) = \lim_{\not{k} \rightarrow m} \frac{1}{\not{k} - m - \Sigma(m) + \frac{d\Sigma(\not{k})}{d\not{k}}|_{\not{k}=m}(\not{k} - m) + i\epsilon} \Rightarrow \Sigma(m) = 0 \text{ e } \frac{d\Sigma(\not{k})}{d\not{k}}|_{\not{k}=m} = 0.$$

Sfruttando la (8.4) le condizioni appena determinate diventano

$$\begin{aligned} \Sigma(m)_{LOOP} &= -Z_2\delta m; \\ Z_2 &= 1 - \frac{d\Sigma(\not{k})_{LOOP}}{d\not{k}}|_{\not{k}=m} \end{aligned} \quad (8.5)$$

restituendo quindi delle relazioni tra l'auto-energia dell'elettrone (le correzioni) e la costante di rinormalizzazione.

Vediamo più nel dettaglio il caso del primo ordine in teoria delle perturbazioni cambiando però punto di vista; non definiamo a priori nessun campo rinormalizzato. Lo spostamento della massa della particella δm si può esprimere come una serie perturbativa nel parametro $\alpha_{EM} = \frac{e_0^2}{4\pi}$, ossia nella costante di struttura fine che è la costante di accoppiamento della spQED. Al primo ordine il propagatore esatto si scrive

$$iS_{esatto}(k) = \frac{i}{\not{k} - m + i\epsilon} + \frac{i}{\not{k} - m + i\epsilon} (i\Sigma(k)_{LOOP} + i\delta m) \frac{i}{\not{k} - m + i\epsilon}, \quad (8.6)$$

le correzioni sono dovute all'auto-energia ed al controtermine di massa; i diagrammi sono riportati nella figura sottostante.

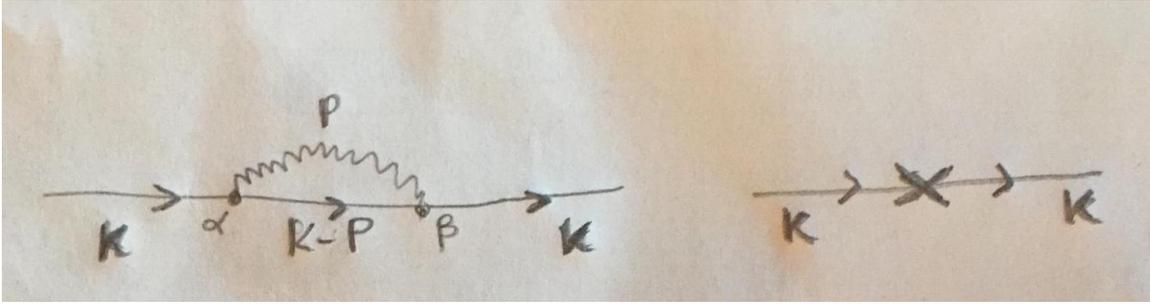


Figura 8.2: Diagrammi di Feynman che rappresentano le correzioni al primo ordine in α_{EM} al propagatore fermionico. Il diagramma a sinistra è una correzione radiativa mentre quello a destra una correzione dovuta al controtermine di massa.

La correzione dovuta all'auto-energia (diagramma a sinistra) si esplicita come

$$i\Sigma(k)_{LOOP} = \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \gamma_\alpha \frac{-i\eta^{\alpha\beta}}{p^2 + i\epsilon} \frac{i}{(\not{k} - \not{p}) - m + i\epsilon} \gamma_\beta = \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \gamma_\alpha \frac{1}{p^2 + i\epsilon} \frac{1}{(\not{k} - \not{p}) - m + i\epsilon} \gamma^\alpha;$$

che diverge linearmente (per alti impulsi k l'integrale diverge come una potenza lineare di k). Scriviamo l'integrale sopra come uno sviluppo della forma $ie_0^2 A + ie_0^2 B(\not{k} - m) + ie_0^2 \Sigma_c(k)(\not{k} - m)$, in cui nell'ultimo termine sono contenuti tutti gli ordini successivi al primo; i termini di ordine zero ed uno dovranno essere divergenti (dato che l'integrale diverge linearmente) mentre i termini successivi saranno convergenti. Inseriamo questo tipo di sviluppo nella (8.6) (nella quale consideriamo solo il primo ordine in α_{EM} del controtermine di massa $\delta m = c_2 e_0^2$)

$$\begin{aligned} iS_{esatto}(k) &= \frac{i}{\not{k} - m + i\epsilon} + \frac{i}{\not{k} - m + i\epsilon} (ie_0^2 A + ie_0^2 B(\not{k} - m) + ie_0^2 \Sigma_c(k)(\not{k} - m) + ic_2 e_0^2) \frac{i}{\not{k} - m + i\epsilon} = \\ &= \frac{i}{\not{k} - m + i\epsilon} + \left(\frac{i}{\not{k} - m + i\epsilon} \right)^2 (ie_0^2 A + ic_2 e_0^2) + \left(\frac{i}{\not{k} - m + i\epsilon} \right)^2 (ie_0^2 B(\not{k} - m) + ie_0^2 \Sigma_c(k)(\not{k} - m)) = \\ &= \frac{i}{\not{k} - m + i\epsilon} + \left(\frac{i}{\not{k} - m + i\epsilon} \right)^2 (ie_0^2 A + ic_2 e_0^2) - \frac{ie_0^2 B}{\not{k} - m + i\epsilon} - \frac{ie_0^2 \Sigma_c(k)}{\not{k} - m + i\epsilon} \Rightarrow \\ &\Rightarrow S_{esatto}(k) = \frac{1}{\not{k} - m + i\epsilon} - \left(\frac{1}{\not{k} - m + i\epsilon} \right)^2 (e_0^2 A + c_2 e_0^2) - \frac{e_0^2 B}{\not{k} - m + i\epsilon} - \frac{e_0^2 \Sigma_c(k)}{\not{k} - m + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Dalla rappresentazione di Källén-Lehmann sappiamo che il propagatore esatto a due punti possiede un polo semplice in $k = m$ per cui notiamo subito che deve essere $Z_2 = 1 - e_0^2 B + O(e_0^4)$; inoltre il polo doppio deve essere nullo per cui $A = -c_2$. Per quanto riguarda l'ultimo termine della (8.7), sappiamo che $\Sigma_c(\not{k})$ contiene dalla potenza lineare in poi, per cui può essere interpretato come il termine regolare della rappresentazione spettrale (quello che contiene il taglio) e quindi deve essere $\Sigma_c(\not{k} = m) = 0$.

È interessante notare che la correzione al propagatore è, in definitiva, contenuta nella costante di rinormalizzazione Z_2 (quindi una linea interna fermionica porta con se una Z_2 che può essere pensata come suddivisa tra i due vertici collegati dalla linea); le linee esterne fermioniche, dalle formule LSZ (7.13), portano con loro un fattore $\sqrt{Z_2}$. Poichè in ogni vertice confluiscono due linee fermioniche, otteniamo che il termine associato al vertice, $e_0 \gamma^\mu$, viene moltiplicato per Z_2 . Dato che la carica elettrica è misurata sulla base dell'interazione, la quantità osservabile non è e_0 ma $Z_2 e_0$, per cui potremmo rinormalizzare la carica elettrica fin dal principio scrivendo ed utilizzando $e = Z_2 e_0$, così da poter cancellare tutti i fattori Z_2 che compaiono come correzioni delle linee fermioniche. È importante notare che $Z_2 = (1 - e_0^2 B)$ contiene la divergenza della correzione di auto-energia dell'elettrone; questo vuol dire che ridefinendo la carica elettrica come $e = Z_2 e_0$ possiamo eliminare la divergenza. Questa è l'essenza della rinormalizzazione.

8.2.2 Il propagatore fotonico

Occupiamoci ora delle correzioni al propagatore fotonico. Consideriamo il propagatore esatto fotonico

$$\Delta_{esatto}^{\mu\nu}(q) = \Delta^{\mu\nu}(q) + \Delta^{\mu\rho} M_{\rho\sigma}(q) \Delta^{\sigma\nu}(q), \quad (8.8)$$

in cui $M_{\rho\sigma}$ contiene tutte le correzioni al propagatore. Per l'identità di Ward si ha $q^\mu M_{\mu\nu} = 0$ (mostrato in **Appendice F**) per cui, giocando con gli indici

$$q_\mu \Delta_{esatto}^{\mu\nu}(q) = q_\mu \Delta^{\mu\nu}(q) = q_\mu \left(\frac{\eta^{\mu\nu} + \frac{(\xi-1)}{q^2} q^\mu q^\nu}{q^2 + i\epsilon} \right) = \frac{q^\nu (1 + (\xi - 1))}{q^2 + i\epsilon}.$$

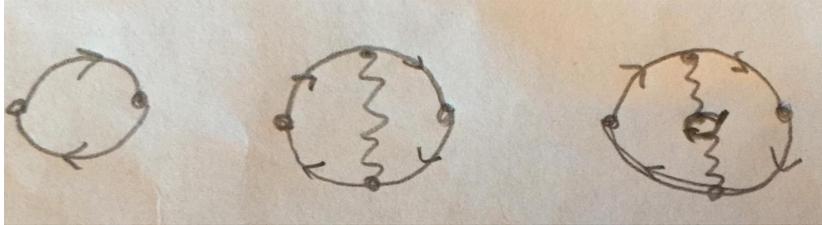


Figura 8.3: *Diagrammi di Feynman che rappresentano alcune correzioni 1PI sulle linee esterne al propagatore fotonico.*

Dall'altra parte possiamo considerare, come fatto per il propagatore fermionico, il propagatore fotonico espresso come una serie composta da termini correttivi che siano solo 1PI (al contrario di $M_{\rho\sigma}(q)$),

$$\begin{aligned} \Delta_{esatto}^{\mu\nu} &= \frac{\eta^{\mu\nu} + \frac{(\xi-1)}{q^2} q^\mu q^\nu}{q^2 + i\epsilon} + \frac{\eta^{\mu\rho} + \frac{(\xi-1)}{q^2} q^\mu q^\rho}{q^2 + i\epsilon} (\Pi)_{\rho\sigma} \frac{\eta^{\sigma\nu} + \frac{(\xi-1)}{q^2} q^\sigma q^\nu}{q^2 + i\epsilon} + \dots = \\ &= \frac{()}{\square} \left(1 + \Pi_{\rho\sigma} \frac{()}{\square} + \dots \right) = \frac{()}{\square} \left(\frac{1}{1 - \Pi_{\rho\sigma} \frac{()}{\square}} \right) = \frac{()}{\square - \Pi_{\rho\sigma} ()}, \end{aligned} \quad (8.9)$$

in cui $() = \eta^{\alpha\beta} + \frac{(\xi-1)}{q^2} q^\alpha q^\beta$ e $\square = q^2 + i\epsilon$. Dalla prima riga della (8.9) vediamo che per essere $q_\mu \Delta_{esatto}^{\mu\nu}(q) = q_\mu \Delta^{\mu\nu}(q)$ deve risultare $q^\rho \Pi_{\rho\sigma} = 0$; questa condizione assieme all'invarianza di Lorentz ci permette di dire

che deve essere $\Pi_{\rho\sigma} = (q^2\eta_{\rho\sigma} - q_\rho q_\sigma)\pi(q^2)$. Con questa riscrittura il propagatore fotonico esatto può essere scritto come

$$\Delta_{esatto}^{\mu\nu} = \frac{\eta^{\mu\nu} - \frac{\Xi q^\mu q^\nu}{q^2}}{(q^2 + i\epsilon)(1 - \pi(q^2))}, \quad (8.10)$$

in cui $\Xi = (1 - \xi)(1 - \pi(q^2)) + \pi(q^2)$; poichè vogliamo che (stando alla rappresentazione spettrale) la parte della (8.10) invariante di gauge abbia un polo solo in $q^2 = 0$ e che il residuo corrispondente non cambi rispetto al caso non interagente, dobbiamo porre $\pi(0) = 0$. Definendo il campo fotonico rinormalizzato come $A^\mu = \frac{1}{\sqrt{Z_3}}A_s^\mu$ la densità di lagrangiana di Maxwell spoglia, $\mathcal{L}_{EM,s} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu,s}F_s^{\mu\nu}$ diventa

$$\mathcal{L}_{EM} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{Z_3}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{(1 - Z_3)}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

e quindi la correzione $\pi(q^2)$ (il termine contenente la struttura tensoriale è irrilevante per questo ragionamento, dato che ci interessa solo l'ampiezza dei diagrammi) sarà data da

$$\pi(q^2) = 1 - Z_3 + \pi(q^2)_{LOOP}. \quad (8.11)$$

Ponendo $q^2 = 0$ otteniamo una relazione per la costante di rinormalizzazione del fotone

$$Z_3 = 1 + \pi(0)_{LOOP}. \quad (8.12)$$

È interessante sottolineare che il termine dipendente dalla gauge viene, in generale, alterato dalle correzioni, ma nel caso speciale della gauge di Landau ($\xi = 0$) rimane invariato.

Concentriamoci sul caso del primo ordine, come in precedenza cambiando punto di vista. La correzione dovuta a loop è mostrata nella figura sottostante.

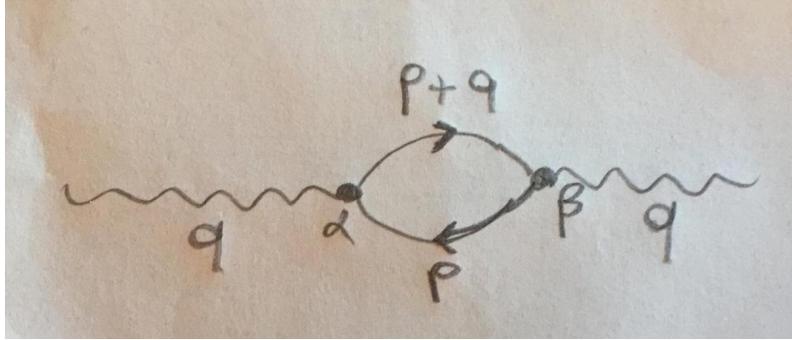


Figura 8.4: *Correzione radiativa al propagatore fotonico.*

Il propagatore corretto al primo ordine in α_{EM} , appare scritto come

$$i\Delta_{esatto}^{\mu\nu} = \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} + \frac{-i\eta^{\mu\alpha}}{q^2 + i\epsilon} (i\Pi_{\alpha\beta}) \frac{-i\eta^{\beta\nu}}{q^2 + i\epsilon}, \quad (8.13)$$

in cui $i\Pi_{\alpha\beta}$ rappresenta qui, solo la correzione dovuta al loop in Figura 8.4. Esplicitiamo $i\Pi_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} i\Pi_{\alpha\beta} &= \frac{(-1)(ie_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \gamma_\alpha^{ab} \frac{i(\not{p} + m)_{bc}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_\beta^{cd} \frac{i(\not{p} + \not{q} + m)_{da}}{(p+q)^2 - m^2 + i\epsilon} = \\ &= \frac{(-1)(ie_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{\text{Tr}(\gamma_\alpha(\not{p} + m)\gamma_\beta(\not{p} + \not{q} + m))}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)((p+q)^2 - m^2 + i\epsilon)}; \end{aligned}$$

l'integrale appena scritto risulta divergente (diverge quadraticamente) e andrebbe calcolato in una teoria regolarizzata. Come già, in un certo senso sappiamo, possiamo scrivere $\Pi_{\alpha\beta} = e_0^2 \eta_{\alpha\beta} A(q^2) + e_0^2 q_\alpha q_\beta B(q^2)$ e grazie alla condizione $q^\beta \Pi_{\alpha\beta} = 0$ abbiamo che $A(q^2) = q^2 B(q^2)$. Se sviluppiamo il coefficiente A in potenze di q^2 otteniamo

$$A(q^2) = A(0) + q^2 A'(0) + q^2 \Pi_c(q^2),$$

in cui il termine $q^2 \Pi_c(q^2)$ contiene i termini dello sviluppo superiori che risultano convergenti e il termine $A(0) = 0$; inoltre il termine contenente $q_\alpha q_\beta B(q^2)$ non gioca alcun ruolo dato che il propagatore fotonico è sempre associato a due correnti di Dirac che sono conservate (di competenza dei due vertici a cui è attaccato il propagatore). Sostituendo la scrittura di $\Pi_{\alpha\beta}$ nella (8.13) otteniamo

$$\begin{aligned} i\Delta_{esatto}^{\mu\nu} &= \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} + \frac{-i\eta^{\mu\alpha}}{q^2 + i\epsilon} (e_0^2 \eta_{\alpha\beta} (iq^2 A'(0) + iq^2 \Pi_c(q^2))) \frac{-i\eta^{\beta\nu}}{q^2 + i\epsilon} = \\ &= \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} + \frac{-i\eta^{\mu\alpha}}{q^2 + i\epsilon} e_0^2 \eta_{\alpha\beta} q^2 A'(0) \frac{\eta^{\beta\nu}}{q^2 + i\epsilon} + \frac{-i\eta^{\mu\alpha}}{q^2 + i\epsilon} e_0^2 \eta_{\alpha\beta} q^2 \Pi_c(q^2) \frac{\eta^{\beta\nu}}{q^2 + i\epsilon} = \\ &= \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} + \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} e_0^2 A'(0) + \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} e_0^2 \Pi_c(q^2) = \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} (1 + e_0^2 A'(0)) + \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} e_0^2 \Pi_c(q^2); \end{aligned} \quad (8.14)$$

che confrontata con la rappresentazione spettrale ci restituisce $Z_3 = 1 + e_0^2 A'(0)$ (il secondo addendo è regolare quando la particella è messa on shell e non contribuisce al polo semplice). Come in precedenza, il propagatore è associato a due vertici e quindi risulta che la carica e_0 di ogni vertice viene moltiplicata per un fattore $\sqrt{Z_3}$; questo è valido anche per le linee fotoniche esterne che per via delle formule LSZ si portano appresso un fattore $\sqrt{Z_3}$ che risulta moltiplicare la carica spoglia dato che la linea deve confluire in un vertice. Per cui rinormalizzando la carica, $e = \sqrt{Z_3} e_0$, siamo in grado di eliminare le divergenze nascoste nella costante di rinormalizzazione.

8.2.3 Il vertice di interazione $ee\gamma$

Consideriamo, ora, la correzione al vertice; consideriamo solo il caso della correzione al primo ordine nella costante di struttura fine riportata in figura.

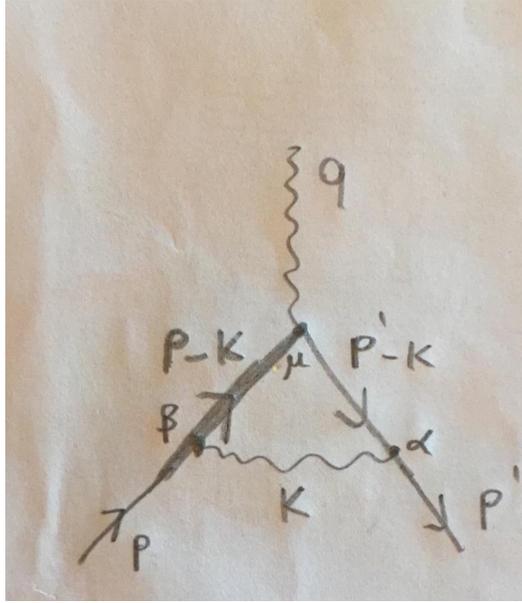


Figura 8.5: Diagramma che rappresenta la correzione al vertice al primo ordine nella costante di struttura fine.

Il diagramma equivale a

$$i\Lambda^\mu = \frac{(ie_0)^3}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{-i\eta_{\alpha\beta} \gamma^\alpha}{k^2 + i\epsilon} \frac{i}{\not{p}' - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\beta \quad (8.15)$$

che, come si vede, è logaritmicamente divergente per $k \rightarrow \infty$ ma anche divergente nella regione infrarossa. Nel limite ultravioletto possiamo trascurare gli impulsi \not{p}' , \not{p} e la massa m ottenendo (aggiungiamo della massa al fotone per regolarizzare la divergenza infrarossa)

$$i\Lambda^\mu = \frac{(ie_0)^3}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{i}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\alpha.$$

Possiamo scrivere la correzione come una parte divergente ed una convergente, $\Lambda^\mu = C\gamma^\mu + \Lambda_c^\mu$, in cui C è una costante divergente. Se consideriamo la corrente elettrica associata al vertice (ad esempio per l'elettrone), $e_0 \bar{u}(\mathbf{p}, s) \gamma^\mu u(\mathbf{p}, s)$, la correzione al vertice la modifica e al primo ordine si ha (esplicitando il fattore e_0^3 della correzione)

$$e_0 \bar{u}(\mathbf{p}, s) (\gamma^\mu + e_0^2 \Lambda^\mu) u(\mathbf{p}, s); \quad (8.16)$$

è possibile mostrare che $e_0 \bar{u}(\mathbf{p}, s) \Lambda^\mu u(\mathbf{p}, s) \propto e_0 \bar{u}(\mathbf{p}, s) \gamma^\mu u(\mathbf{p}, s)$; questo ha importanti conseguenze dato che ci permette di affermare che $e_0 \bar{u}(\mathbf{p}, s) \Lambda_c^\mu u(\mathbf{p}, s) = 0$ e che $e_0 \bar{u}(\mathbf{p}, s) \Lambda^\mu u(\mathbf{p}, s) = C e_0 \bar{u}(\mathbf{p}, s) \gamma^\mu u(\mathbf{p}, s)$. Ancora più importante è il fatto che la (8.16) ci spinge verso un'ulteriore rinormalizzazione della carica; per quanto detto poco fa, si ha

$$e_0 \bar{u}(\mathbf{p}, s) \gamma^\mu u(\mathbf{p}, s) \rightarrow e_0 \bar{u}(\mathbf{p}, s) (\gamma^\mu + e_0^2 \Lambda^\mu) u(\mathbf{p}, s) = e_0 \bar{u}(\mathbf{p}, s) \gamma^\mu (1 + e_0^2 C) u(\mathbf{p}, s),$$

il che ci porta a porre la carica rinormalizzata (al primo ordine in α_{EM}) come $e = (1 + e_0^2 C) e_0 = \frac{1}{Z_1} e_0$.

8.3 La rinormalizzazione della carica elettrica

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto come la carica elettrica venga rinormalizzata. Le rinormalizzazioni sono ottenute considerando le correzioni ai propagatori ed al vertice e sono date da

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{Z_3}e_0 \\ e &= Z_2e_0 \\ e &= \frac{e_0}{Z_1} \end{aligned}$$

combinando queste tre (la carica e è sempre la carica elettrica fisica) si ottiene

$$e = \frac{\sqrt{Z_3}Z_2}{Z_1}e_0$$

ma, come vedremo ora, $Z_1 = Z_2$. Consideriamo il seguente oggetto

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}', s') \frac{d\Sigma(\not{k})_{LOOP}}{dk_\mu} u(\mathbf{p}, s) &= \bar{u}(\mathbf{p}', s') \frac{d(A + B(k_\mu\gamma^\mu - m) + \Sigma_c(\not{k})(k_\mu\gamma^\mu - m))}{dk_\mu} u(\mathbf{p}, s) = \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}', s') (B\gamma^\mu + \frac{\Sigma_c(\not{k})}{dk_\mu} (k_\mu\gamma^\mu - m) + \Sigma_c(\not{k}\gamma^\mu)) u(\mathbf{p}, s) = B\bar{u}(\mathbf{p}', s')\gamma^\mu u(\mathbf{p}, s) = \bar{u}(\mathbf{p}', s')\Lambda^\mu(\mathbf{p}, s) = \\ &= C\bar{u}(\mathbf{p}', s')\gamma^\mu u(\mathbf{p}, s); \end{aligned} \quad (8.17)$$

in cui nel primo passaggio abbiamo sostituito lo sviluppo dell'auto-energia dell'elettrone in potenze di $(\not{k}-m)$ (in cui abbiamo riassorbito le costanti ie_0^2 direttamente nella definizione), nel terzo passaggio abbiamo utilizzato le equazioni del moto che ci dicono che $(\not{k}-m)u(\mathbf{p}, s) = 0 = \bar{u}(\mathbf{p}, s)(\not{k}-m)$ e ricordando che $\Sigma_c(\not{k})$ è esso stesso proporzionale a $(\not{k}-m)$. Nel quarto passaggio si è usata l'identità di Ward ($\frac{d\Sigma(\not{k})_{LOOP}}{dk_\mu} = \Lambda^\mu$). La (8.17) ci mostra che $B = C$, conseguentemente si ha

$$\frac{1}{Z_1} = (1 + e_0^2 C) = (1 + e_0^2 B) = (1 + e_0^2 B) \frac{(1 - e_0^2 B)}{(1 - e_0^2 B)} = \frac{1}{1 - e_0^2 B} + \text{ordini superiori} = \frac{1}{Z_2} \Rightarrow Z_1 = Z_2;$$

in conclusione si ha che al primo ordine in α_{EM} $Z_1 = Z_2$ e la carica viene rinormalizzata solo come

$$e = \sqrt{Z_3}e_0. \quad (8.18)$$

La condizione che permette di semplificare le correzioni Z_1 e Z_2 è di capitale importanza per capire come sia possibile che la carica dell'elettrone sia, in modulo, uguale a quella del protone; le correzioni al vertice ed al propagatore dipendono dalle interazioni e il protone è soggetto anche alle interazioni forti, quindi il fatto che la correzione al vertice ed al propagatore fermionico si semplifichino e che la carica venga rinormalizzata solo dalle correzioni al propagatore fotonico ci fa comprendere meglio l'universalità della carica elettrica e .

Il ruolo della rinormalizzazione è duplice: innanzi tutto ha il compito di mettere i poli dei propagatori in corrispondenza delle masse fisiche delle particelle e quindi di rispettare la rappresentazione spettrale; in secondo luogo, anche quello di rimuovere le divergenze. Se esprimessimo nuovamente la serie perturbativa in termini della carica rinormalizzata (la carica fisica e) dovremmo dividere i prodotti in cui compare la carica per le costanti di normalizzazione e questo rinormalizza i propagatori o il vertice eliminando così le divergenze; in conclusione quello che facciamo è spostare le divergenze dai propagatori o dal vertice alla carica elettrica che sappiamo essere finita.

Capitolo 9

Applicazioni importanti della spQED

In questa sezione vogliamo studiare alcune applicazioni di quanto visto fino ad ora: studieremo il caso dello scattering in un campo esterno e vedremo meglio come trattare le divergenze infrarosse. Studieremo anche la polarizzazione del vuoto, calcolando il tensore di correzione del propagatore fotonico al primo ordine; vedremo, poi, il calcolo che portò alla correzione del fattore g e quindi al momento magnetico anomalo dei leptoni.

9.1 Scattering in campo esterno e bremsstrahlung

La diffusione in un campo esterno è una idealizzazione dello scattering di una particella con un bersaglio di massa molto maggiore della massa della particella, come ad esempio un nucleo pesante che può essere considerato come una distribuzione di carica statica

$$j_{classica}^\mu(x) = (\rho(\mathbf{x}), \mathbf{j} = \mathbf{0}),$$

in cui $\int d\mathbf{x}\rho(\mathbf{x}) = Ze$ con Z numero atomico dell'atomo. L'interazione tra un elettrone ed il campo esterno generato dalla presenza dell'atomo è descrivibile aggiungendo un termine nella densità di lagrangiana di interazione che accoppia il campo EM alla corrente classica $j_{classica}^\mu(x)$, ossia un termine del tipo $-j_{classica}^\mu(x)B_\mu$. L'unica modifica da fare al formalismo del funzionale generatore è che quando si pongono a zero le sorgenti esterne bisogna porre $\bar{J} = J = 0$ ma $J^\mu = j_{classica}^\mu$.

Cominciamo considerando la diffusione schematizzata nella figura che segue

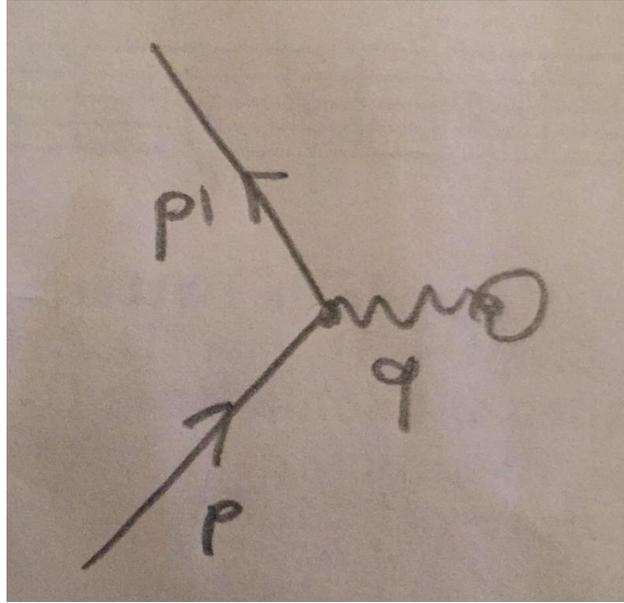


Figura 9.1: Diagramma che rappresenta la diffusione di una particella in un campo esterno.

Sappiamo che alla linea esterna fotonica è associato il fattore $\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{j_{classica}^\mu(q)}{q^2 + i\epsilon}$, in cui $j_{classica}^\mu(q)$ è la trasformata di Fourier della corrente classica; nel nostro caso (essendo la distribuzione statica abbiamo solo la componente $\mu = 0$)

$$j_{classica}^0(q) = \int d^4y e^{iqy} j_{classica}^0(y) = \int d^4y e^{-iq_0t} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} \rho(|\mathbf{x}|) = 2\pi\delta(q_0) Z e_0 F(\mathbf{q})$$

in cui abbiamo introdotto il fattore di forma definito come la trasformata di Fourier sulle coordinate spaziali della distribuzione di carica (assunta a simmetria sferica). L'elemento di matrice S si scrive quindi

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}', s' | S | \mathbf{p}, s \rangle &= (ie) \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E}} \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3 E'}} \delta^{(4)}(q + p - p') \frac{j_{classica}^\mu(q)}{q^2 + i\epsilon} \bar{u}(p', s') \gamma_\mu u(p, s) = \\ &= (ie) \frac{m}{(2\pi)^3 \sqrt{EE'}} \frac{2\pi\delta(E' - E) Z e F(\mathbf{p}' - \mathbf{p})}{(p' - p)^2} \bar{u}(p', s') \gamma_0 u(p, s) = \\ &= (ie^2) \frac{m}{(2\pi)^2 E} \frac{Z F(\mathbf{p}' - \mathbf{p})}{(p' - p)^2} \bar{u}(p', s') \gamma_0 u(p, s), \end{aligned} \quad (9.1)$$

come si vede, la presenza della delta di Dirac fa sì che il processo sia elastico (abbiamo conservazione dell'energia ma non dell'impulso).

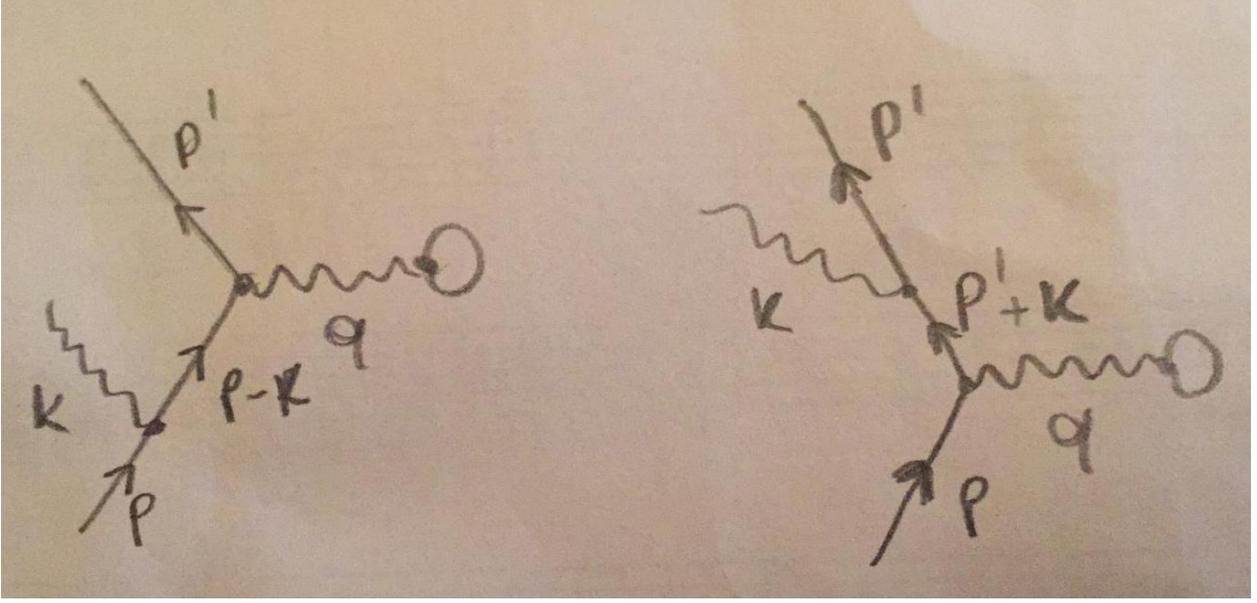


Figura 9.2: Diagrammi di Feynman per il processo di bremsstrahlung, per un detector è impossibile rivelare fotoni sufficientemente soft.

A questo punto occorre buttare un'occhio alla parte sperimentale di tutto questo. Poichè i fotoni hanno massa nulla è possibile avere nello stato finale fotoni detti soft, intendendo fotoni con energia molto bassa; i detector (approfondiamo brevemente in **Appendice I** come poter rilevare un fotone) non sono in grado di rivelare fotoni al di sotto di una certa soglia Δ , per cui nel calcolo della sezione d'urto dobbiamo tener conto della possibilità che l'elettrone emetta fotoni soft per bremsstrahlung. I diagrammi, all'ordine più basso, sono riportati nella Figura 9.2; entrambi prevedono un fotone nello stato finale (irrilevabile per i detector perchè sotto la soglia di funzionamento) e ne vanno quindi sommate le ampiezze. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
 & \langle \mathbf{p}', s'; \mathbf{k}, r | \mathbf{p}, s \rangle = \langle \mathbf{p}', s'; \mathbf{k}, r | \mathbf{p}, s \rangle_1 + \langle \mathbf{p}', s'; \mathbf{k}, r | \mathbf{p}, s \rangle_2 = \\
 & = (ie)^2 \frac{m}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega EE'}} \bar{u}(\mathbf{p}', s') \gamma_\mu \epsilon^\mu(r) \frac{i(\not{p}' + \not{k} + m)}{(p' + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{j_{classica}^\nu}{q^2 + i\epsilon} \gamma_\nu u(\mathbf{p}, s) + \\
 & + (ie)^2 \frac{m}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega EE'}} \bar{u}(\mathbf{p}', s') \gamma_\mu \frac{j_{classica}^\mu}{q^2 + i\epsilon} \frac{i(\not{p} - \not{k} + m)}{(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \epsilon^\nu(r) \gamma_\nu u(\mathbf{p}, s) = \\
 & = \frac{-ie^2 m}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega EE'}} \bar{u}(\mathbf{p}', s') \left[\not{\epsilon}(r) \frac{(\not{p}' + m)}{2p'k} \frac{j_{classica}}{(p' - p)^2} - \frac{j_{classica}}{(p' - p)^2} \frac{(\not{p} + m)}{2pk} \not{\epsilon}(r) \right] u(\mathbf{p}, s)
 \end{aligned} \tag{9.2}$$

in cui, nell'ultimo passaggio, ci siamo ristretti nella parte di spettro elettromagnetico non visibile dal rivelatore, ossia tale che l'impulso k sia trascurabile rispetto alle altre grandezze in gioco (da notare che il segno meno viene dal doppio prodotto al denominatore del secondo addendo). Essendoci messi nella regione a basse energie del fotone si ha che $p' \simeq p$ (e sono on shell) per cui i denominatori in parentesi quadra della (9.2) possono essere considerati uguali; sviluppando il prodotto con struttura spinoriale otteniamo (non indichiamo le dipendenze o i pedici che sono irrilevanti per il conto)

$$\begin{aligned}
 & \bar{u} \not{\epsilon} \not{p}' j u + \bar{u} \not{\epsilon} m j u - \bar{u} j \not{p} \not{\epsilon} u - \bar{u} j m \not{\epsilon} u = -\bar{u} \not{p}' \not{\epsilon} j u + 2\bar{u} p' \epsilon j u + \bar{u} m \not{\epsilon} j u + \bar{u} j \not{\epsilon} p u - 2\bar{u} j \epsilon p u - \bar{u} j \not{\epsilon} m u = \\
 & = 2\bar{u} p' \epsilon j u - 2\bar{u} j \epsilon p u = 2\bar{u} j u (p' \epsilon - \epsilon p),
 \end{aligned}$$

in cui si sono utilizzate le equazioni del moto nello spazio degli impulsi ($\bar{u}(\not{p}' - m) = 0 = (\not{p} - m)u$) e le proprietà di anticommutazione delle matrici gamma (per poter scrivere $\not{\epsilon}\not{p}' = -\not{p}'\not{\epsilon} + 2p'\epsilon$ e $\not{p}'\not{\epsilon} = -\not{\epsilon}\not{p}' + 2\epsilon p$). Mettendo assieme alla (9.2) otteniamo

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}', s'; \mathbf{k}, r | \mathbf{p}, s \rangle &= \frac{-ie^2 m}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega E E'}} 2\bar{u}(\mathbf{p}', s') \frac{\not{J}_{classica}}{(p' - p)^2} u(\mathbf{p}, s) \left(\frac{p'\epsilon}{p'k} - \frac{\epsilon p}{pk} \right) = \\ &= \langle \mathbf{p}', s' | S | \mathbf{p}, s \rangle \frac{-e}{\sqrt{2\omega}} \left(\frac{p'\epsilon}{p'k} - \frac{\epsilon p}{pk} \right). \end{aligned} \quad (9.3)$$

La sezione d'urto del processo è data dalla somma della sezione d'urto elastica e della sezione d'urto associata alla radiazione da frenamento, ossia

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{TOT} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{el} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{brem} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{el} \left(1 - \frac{\alpha_{EM}}{(2\pi)^2} \int_{|\mathbf{k}| < \Delta} \frac{d\mathbf{k}}{\omega} \left[\frac{p'\epsilon}{p'k} - \frac{\epsilon p}{pk} \right]^2 \right), \quad (9.4)$$

come si vede la sezione d'urto ha una divergenza infrarossa, il che è assurdo. Il problema è che abbiamo considerato due processi diversi (sperimentalmente indistinguibili) ad ordini diversi: con riferimento alla sezione d'urto, il processo elastico è di ordine α_{EM}^2 mentre il processo di bremsstrahlung di ordine α_{EM}^3 ; è necessario considerare le correzioni di terzo ordine del processo elastico, come la correzione al vertice. Consideriamo la (8.15), semplifichiamola e scriviamo

$$i\Lambda^\mu = \frac{(ie_0)^3}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{i}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha \frac{\not{p}' - \not{k} + m}{(p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{\not{p} - \not{k} + m}{(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_\alpha,$$

inseriamo a sandwich tra $\bar{u}(\mathbf{p}', s')$ e $u(\mathbf{p}, s)$ e usando il teorema dei residui per integrare in $k_0 = \omega_\lambda$ possiamo scrivere (il teorema dei residui fissa il valore di k_0 uguale al valore nel polo $k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda^2}$ per cui nello svolgere i quadrati ai denominatori compare la massa fittizia del fotone)

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}', s') \Lambda^\mu u(\mathbf{p}, s) &= \frac{ie^3}{(2\pi)^4} 2\pi i \int \frac{d\mathbf{k}}{2\omega_\lambda} \frac{4pp' \bar{u}(\mathbf{p}', s') \gamma^\mu u(\mathbf{p}, s)}{[-2p'k + \lambda^2][-2pk + \lambda^2]} = \\ &= \frac{-e^3}{2(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{2\omega_\lambda} \frac{4pp' \bar{u}(\mathbf{p}', s') \gamma^\mu u(\mathbf{p}, s)}{[-2p'k + \lambda^2][-2pk + \lambda^2]}; \end{aligned} \quad (9.5)$$

in cui si sono utilizzate le equazioni del moto per manipolare il termini con struttura spinoriale, inoltre l'interazione rimanente è fatta sullo spettro a basse energie dei fotoni. Sappiamo che la funzione di vertice ha un termine osservabile (non divergente) ed uno divergente, i due possono essere separati tramite le relazioni $\Lambda^\mu = C\gamma^\mu + \lambda_c^\mu$ e $\bar{u}(\mathbf{p}, s)\Lambda_c^\mu u(\mathbf{p}, s) = 0$ (quest'ultima può essere utilizzata perchè essendo $k \simeq 0$ si ha $p \simeq p'$). In definitiva l'ampiezza di probabilità elastica all'ordine α_{EM}^3 si scrive

$$\langle \mathbf{p}', s' | S | \mathbf{p}, s \rangle_{el, \alpha^3} = \langle \mathbf{p}', s' | S | \mathbf{p}, s \rangle_{el} \left(1 + \frac{\alpha_{EM}}{2(2\pi)^3} \int_{|\mathbf{k}| < \Delta} \frac{d\mathbf{k}}{\omega_\lambda} \left[\frac{2p'}{-2p'k - \lambda^2} - \frac{2p}{-2pk + \lambda^2} \right]^2 \right);$$

è possibile verificare che, considerando anche questo termine nella sezione d'urto totale, si ha la cancellazione delle divergenze infrarosse. Questo è un risultato generale dovuto a Bloch e Nordsieck: le divergenze infrarosse si cancellano a tutti gli ordini della teoria delle perturbazioni (purchè si considerino processi dello stesso ordine).

9.2 Polarizzazione del vuoto e calcolo del tensore di correzione ad un loop al propagatore fotonico

In questa sezione calcoleremo esplicitamente il tensore di correzione del propagatore fotonico al primo ordine in α_{EM} dovuto alla polarizzazione del vuoto. Per il calcolo è necessario sviluppare alcuni metodi specifici che sono riportati di seguito.

9.2.1 Integrali tipici e parametri di Feynman

Come detto, svilupperemo qui dei metodi di calcolo importanti in teoria dei campi.

Integrali tipici

Consideriamo il seguente integrale

$$I(s, D, n) = \int \frac{d^D k}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} = \int \frac{dk_0 dk_1 \dots dk_{D-1}}{((k_0)^2 - (k_1)^2 - \dots - (k_{D-1})^2 - s + i\epsilon)^n},$$

in cui assumiamo s reale e positivo e la metrica di Minkowski con segnatura $(1, D-1)$. Per prima cosa eseguiamo una rotazione di Wick nella variabile k_0 , cioè la riscriviamo come $k_0 = ik_D$ e $dk_0 = idk_D$ per poter riscrivere l'integrale iniziale come

$$\begin{aligned} I(s, D, n) &= \int \frac{idk_D dk_1 \dots dk_{D-1}}{((ik_D)^2 - (k_1)^2 - \dots - (k_{D-1})^2 - s + i\epsilon)^n} = \\ &= i \int \frac{dk_D dk_1 \dots dk_{D-1}}{((-1)((k_D)^2 + (k_1)^2 + \dots + (k_{D-1})^2 + s + i\epsilon)^n} = i(-1)^n \int \frac{d^D p}{(p^2 + s)^n}, \end{aligned}$$

in cui $p = (k_D, k_1, \dots, k_{D-1})$. è un vettore con norma euclidea.

A questo punto ci spostiamo in coordinate sferiche, integrando direttamente sulle variabili angolari (l'integrando non ne dipende), possiamo scrivere

$$I(s, D, n) = i(-1)^n \Omega_D \int_0^\infty \frac{p^{D-1} dp}{(p^2 + s)^n},$$

operando il cambio di variabili $x = \frac{p^2}{s}$ (da cui $dx = \frac{1}{s} 2p dp$) otteniamo

$$\begin{aligned} I(s, D, n) &= i(-1)^n \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^\infty \frac{(xs)^{\frac{D-1}{2}} \frac{s}{2p} dx}{s^n (\frac{p^2}{s} + 1)^n} = i(-1)^n \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{2\Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^\infty \frac{(xs)^{\frac{D-1}{2}} \frac{s}{p} dx}{s^n (x+1)^n} = \\ &= i(-1)^n \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \frac{s^{\frac{D-1}{2}} s s^{-\frac{1}{2}}}{s^n} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{D-1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx}{(x+1)^n} = i(-1)^n \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \frac{1}{s^{n-\frac{D}{2}}} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{D-2}{2}} dx}{(x+1)^n}; \end{aligned}$$

in cui abbiamo sostituito, oltre che la nuova variabile, anche l'angolo solido D dimensionale (in **Appendice G** si trovano approfondimenti sulla gamma di Eulero). Ricordando la definizione della beta di Eulero (trattata brevemente in **Appendice G**), $\beta(z, w) = \int_0^\infty \frac{x^{z-1} dx}{(x+1)^{z+w}} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$, possiamo riscrivere l'integrale nella sua forma finale:

$$\begin{aligned} I(s, D, n) &= i(-1)^n \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \frac{1}{s^{n-\frac{D}{2}}} \beta\left(\frac{D-2}{2} + 1, n - \frac{D-2}{2} + 1\right) = \\ &= i(-1)^n \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \frac{1}{s^{n-\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} = i(-1)^n \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{s^{n-\frac{D}{2}}}; \end{aligned} \tag{9.6}$$

in cui per determinare z e w si è risolto il sistema algebrico $z + w = n$, $z - 1 = \frac{D-2}{2}$. La (9.6) è una funzione analitica di D ovunque tranne che per $D = n, n - 1, n - 2, \dots$ per via delle proprietà di analiticità della gamma di Eulero.

Parametri di Feynman

Veniamo ora ai parametri di Feynman; in sostanza sono un modo conveniente di riscrivere alcune quantità. Consideriamo la quantità $\frac{1}{AB}$ che può essere riscritta come

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} &= \frac{A - B}{AB(A - B)} = \frac{1}{B(A - B)} - \frac{1}{A(A - B)} = \frac{1}{A - B} \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) = \int_0^1 \frac{dx}{(xA + (1 - x)B)^2} = \\ &= \int_0^1 dx \int dy \delta(y + x - 1) \frac{1}{(xA + yB)^2}, \end{aligned} \quad (9.7)$$

i parametri x ed y sono detti parametri di Feynman. Possiamo andare oltre e cercare di esprimere mediante parametri di Feynman la quantità $\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n}$. Partiamo dalla rappresentazione di Schwinger ($a > 0$)

$$\frac{1}{A} = \int_0^\infty da e^{-aA},$$

quindi abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} &= \frac{1}{A_1} \frac{1}{A_2} \dots \frac{1}{A_n} = \int_0^\infty \prod_{i=1}^n da_i e^{-\sum_{i=1}^n a_i A_i} = \int_0^\infty dy \int_0^\infty \delta\left(y - \sum_{i=1}^n a_i\right) \prod_{i=1}^n da_i e^{-y A_i} = \\ &= \int_0^\infty dy \int_0^\infty y^n \prod_{i=1}^n dx_i \delta\left(y - y \sum_{i=1}^n x_i\right) e^{-y \sum_{i=1}^n x_i A_i} = \\ &= \int_0^\infty dy \int_0^\infty y^{n-1} \prod_{i=1}^n dx_i \delta\left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right) e^{-y \sum_{i=1}^n x_i A_i} = \\ &= \int_0^\infty dy \int_0^1 y^{n-1} \prod_{i=1}^n dx_i \delta\left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right) e^{-y \sum_{i=1}^n x_i A_i} = \\ &= \int_0^1 \prod_{i=1}^n dx_i \delta\left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right) \int_0^\infty \frac{dt}{\sum_{i=1}^n x_i A_i} \frac{t^{n-1}}{(\sum_{i=1}^n x_i A_i)^{n-1}} e^{-t} = \\ &= \int_0^1 \prod_{i=1}^n dx_i \delta\left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right) \frac{1}{(\sum_{i=1}^n x_i A_i)^n} \int_0^\infty dt t^{n-1} e^{-t} = \\ &= \int_0^1 \prod_{i=1}^n dx_i \delta\left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right) \frac{1}{(\sum_{i=1}^n x_i A_i)^n} \Gamma(n) = \\ &= \int_0^1 \prod_{i=1}^n dx_i \delta\left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right) \frac{(n-1)!}{(\sum_{i=1}^n x_i A_i)^n}, \end{aligned} \quad (9.8)$$

in cui nel secondo passaggio abbiamo usato la rappresentazione di Schwinger, nel terzo passaggio abbiamo introdotto una delta di Dirac (che è sufficiente integrare solo nella semiretta positiva dato che per ipotesi le $a_i > 0$ e quindi anche la loro somma lo è), nel quarto passaggio abbiamo usato il cambio di variabile $a_i = yx_i$, nel quinto passaggio si è sfruttata la proprietà di riflessione della delta ($\delta(cx) = \frac{1}{|c|} \delta(x)$); sempre grazie alla delta, nel sesto passaggio, abbiamo cambiato gli estremi degli integrali sulle x_i dato che se la loro somma è uguale ad 1 e sono positivi allora anche ognuna di esse cadrà nell'intervallo $[0, 1]$, nel

settimo passaggio si è usato il cambio di variabili $t = y \sum_{i=1}^n x_i A_i$ per poter ottenere una gamma di Eulero, nell'ultimo passaggio si è utilizzata la nota proprietà della funzione gamma.

La (9.8) può essere ulteriormente generalizzata ottenendo (con passaggi simili ma più complessi)

$$\frac{1}{A_1^{m_1} A_2^{m_2} \dots A_n^{m_n}} = \int_0^1 \prod_{i=1}^n dx_i \delta\left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right) \frac{\prod_{i=1}^n x_i^{m_i-1}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i A_i\right)^{\sum_{i=1}^n m_i}} \frac{\Gamma(m_1 + m_2 + \dots + m_n)}{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)\dots\Gamma(m_n)},$$

che, come è facile vedere, si riduce alla (9.8) nel caso $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 1$.

9.2.2 Calcolo ad un loop del tensore di polarizzazione del vuoto

Procediamo con il calcolo vero e proprio; prendiamo la formulazione esplicita del tensore di polarizzazione del vuoto, regolarizzato dimensionalmente

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{(2\pi)^D} \int d^D p \frac{\text{Tr}(\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma^\nu(\not{p} + \not{k} + m))}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon)}, \quad (9.9)$$

riscriviamo il denominatore tramite i parametri di Feynman (guardando la (9.7))

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{dx}{[x((p+k)^2 - m^2) + (1-x)(p^2 - m^2)]^2} = \\ & = \int_0^1 \frac{dx}{[xp^2 + xk^2 + 2xpk - xm^2 + p^2 - xp^2 - m^2 + xm^2]^2} = \int_0^1 \frac{dx}{[xk^2 + 2xpk + p^2 - m^2]^2} = \\ & = \int_0^1 \frac{dx}{[(p+xk)^2 - m^2 + x(1-x)k^2]^2} \end{aligned}$$

e sostituiamo nella (9.9)

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(k) & = \int_0^1 dx \frac{-i}{(2\pi)^D} \int d^D p \frac{\text{Tr}(\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma^\nu(\not{p} + \not{k} + m))}{[(p+xk)^2 - m^2 + x(1-x)k^2 + i\epsilon]^2} = \\ & = \int_0^1 dx \frac{-i}{(2\pi)^D} \int d^D q \frac{\text{Tr}(\gamma^\mu(\not{q} - x\not{k} + m)\gamma^\nu(\not{q} + (1-x)\not{k} + m))}{[q^2 - m^2 + x(1-x)k^2 + i\epsilon]^2}, \end{aligned} \quad (9.10)$$

in cui nel secondo passaggio si è posto $q = p + xk$.

Anche in dimensione arbitraria continuano a valere le proprietà della matrici gamma (con ovvi aggiustamenti legati alla dimensionalità), per cui possiamo calcolare la traccia a numeratore:

$$\text{Tr}(\gamma^\mu(\not{q} - x\not{k} + m)\gamma^\nu(\not{q} + (1-x)\not{k} + m)) = D[2q^\mu q^\nu - \eta^{\mu\nu} q^2 - 2x(1-x)k^\mu k^\nu + \eta^{\mu\nu}(x(1-x)k^2 + m^2)],$$

in cui abbiamo ommesso i termini lineari in q dato che si annullano per simmetria quando integrati. Inseriamo la traccia nella (9.10)

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = \int_0^1 dx \frac{-i}{(2\pi)^D} \int d^D q \frac{D[2q^\mu q^\nu - \eta^{\mu\nu} q^2 - 2x(1-x)k^\mu k^\nu + \eta^{\mu\nu}(x(1-x)k^2 + m^2)]}{(q^2 - s)^2}, \quad (9.11)$$

in cui si è posto $-s = -m^2 + x(1-x)k^2 + i\epsilon$; gli integrali che compaiono nella (9.11) possono essere ricondotti a integrali come il (9.6). Notiamo, per prima cosa, che

$$I(s, D, 1) + sI(s, D, 2) = \int \frac{d^D q}{(q^2 - s)} + s \int \frac{d^D q}{(q^2 - s)^2} = \int d^D q \frac{q^2 - s + s}{(q^2 - s)^2} = \int d^D q \frac{q^2}{(q^2 - s)^2},$$

ed in secondo luogo

$$\eta_{\mu\nu}q^\mu q^\nu = q_\mu q^\mu = q^2 \Rightarrow q^\mu q^\nu = \frac{q^2}{\eta_{\mu\nu}} = \frac{\eta^{\mu\nu}}{D}q^2,$$

in cui si è sfruttato che $\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = \text{Tr}(\delta_\nu^\mu) = D$; per cui

$$\int d^D q \frac{q^\mu q^\nu}{(q^2 - s)^2} = \int d^D q \frac{\frac{\eta^{\mu\nu}}{D}q^2}{(q^2 - s)^2} = \frac{\eta^{\mu\nu}}{D}(I(s, D, 1) + sI(s, D, 2)).$$

Alla luce di tutto questo, la (9.11) si riscrive come

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(k) &= \int_0^1 dx \frac{-i}{(2\pi)^D} D \left[\frac{2\eta^{\mu\nu}}{D}(I(s, D, 1) + sI(s, D, 2)) - \eta^{\mu\nu}(I(s, D, 1) - sI(s, D, 2)) + \right. \\ &\quad \left. - 2x(1-x)k^\mu k^\nu I(s, D, 2) + \eta^{\mu\nu}(x(1-x)k^2 + m^2)I(s, D, 2) \right] = \\ &= \Pi^{\mu\nu}(k) = \int_0^1 dx \frac{-i}{(2\pi)^D} D \left[\frac{2-D}{D}\eta^{\mu\nu}(I(s, D, 1) + sI(s, D, 2)) + \right. \\ &\quad \left. - 2x(1-x)k^\mu k^\nu I(s, D, 2) + \eta^{\mu\nu}(x(1-x)k^2 + m^2)I(s, D, 2) \right]; \end{aligned} \tag{9.12}$$

notando che (mostrata in **Appendice H**)

$$\frac{2-D}{D}I(s, D, 1) = -\frac{2s}{D}I(s, D, 2)$$

otteniamo dalla (9.12)

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(k) &= \int_0^1 dx \frac{-iD}{(2\pi)^D} \left[\eta^{\mu\nu}I(s, D, 2) \left(-\frac{2s}{D} + \frac{2s}{D} - s \right) - 2x(1-x)k^\mu k^\nu I(s, D, 2) + \right. \\ &\quad \left. + \eta^{\mu\nu}(s + 2x(1-x)k^2)I(s, D, 2) \right] = \\ &= \int_0^1 dx \frac{-iD}{(2\pi)^D} \left[-s\eta^{\mu\nu}I(s, D, 2) - 2x(1-x)k^\mu k^\nu I(s, D, 2) + s\eta^{\mu\nu}I(s, D, 2) + \right. \\ &\quad \left. + \eta^{\mu\nu}2x(1-x)k^2 I(s, D, 2) \right] = \\ &= \int_0^1 dx \frac{-iD}{(2\pi)^D} \left[-2x(1-x)k^\mu k^\nu I(s, D, 2) + \eta^{\mu\nu}2x(1-x)k^2 I(s, D, 2) \right] = \\ &= \int_0^1 dx \frac{-iD}{(2\pi)^D} 2x(1-x)I(s, D, 2) \left[\eta^{\mu\nu}k^2 - k^\mu k^\nu \right] = \\ &= \int_0^1 dx \frac{-iD}{(2\pi)^D} 2x(1-x)i(-1)^2 \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(2)} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{s^{2 - \frac{D}{2}}} \left[\eta^{\mu\nu}k^2 - k^\mu k^\nu \right] = \\ &= \int_0^1 dx x(1-x)D \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{s^{2 - \frac{D}{2}}} \left[\eta^{\mu\nu}k^2 - k^\mu k^\nu \right] = \\ &= \int_0^1 dx x(1-x)D \frac{1}{2^{D-1}\pi^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{s^{2 - \frac{D}{2}}} \left[\eta^{\mu\nu}k^2 - k^\mu k^\nu \right] = \frac{D}{2^{D-1}\pi^{\frac{D}{2}}} \int_0^1 dx x(1-x) \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{s^{2 - \frac{D}{2}}} \left[\eta^{\mu\nu}k^2 - k^\mu k^\nu \right]. \end{aligned} \tag{9.13}$$

Dal paragrafo 8.2.2 sappiamo che, al primo ordine in α_{EM} si ha $Z_3 = 1 + e_0^2 \pi(0)_{1LOOP}$ in cui $\pi(0)_{1LOOP}$ è definito mediante $\Pi^{\mu\nu}(k) = (k^2 \eta^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \pi(k^2)_{1LOOP}$, per cui (in $D = 4$ dimensioni)

$$\begin{aligned} Z_3 &= 1 + \frac{4e_0^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \Gamma\left(\left(2 - \frac{D}{2}\right) \rightarrow 0\right) = 1 + \frac{e_0^2}{12\pi^2} \Gamma\left(\left(2 - \frac{D}{2}\right) \rightarrow 0\right) \simeq 1 + \frac{e_0^2}{12\pi^2} \frac{1}{2 - \frac{D}{2}} = \\ &= 1 + \frac{e_0^2}{6\pi^2} \frac{1}{4 - D}, \end{aligned}$$

che diverge data la presenza del polo in 0 della gamma di Eulero (per lo sviluppo abbiamo usato la (G.6)). Possiamo anche dividere la parte divergente e quella convergente del tensore di polarizzazione nel seguente modo

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = (k^2 \eta^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \pi(0)_{1LOOP} + (\pi(k^2)_{1LOOP} - \pi(0)_{1LOOP})(k^2 \eta^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu)$$

in cui, quindi, la parte convergente è data da $\Pi_c(k^2) = \pi(k^2)_{1LOOP} - \pi(0)_{1LOOP}$, ossia

$$\begin{aligned} \Pi_c(k^2) &= \frac{D}{2^{D-1} \pi^{\frac{D}{2}}} \int_0^1 dx x(1-x) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{1}{(m^2 - x(1-x)k^2)^{2-\frac{D}{2}}} - \frac{1}{(m^2)^{2-\frac{D}{2}}} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \ln\left(1 - x(1-x) \frac{k^2}{m^2}\right), \end{aligned} \tag{9.14}$$

nell'ultimo passaggio ci siamo posti in $D = 4$.

9.3 Il momento magnetico anomalo dei leptoni

Il momento magnetico dei leptoni si scrive come

$$\vec{\mu}_e = g \frac{e}{2m} \vec{S} = g \mu_{Bohr} \vec{S}, \tag{9.15}$$

il quale si accoppia col campo magnetico per dare l'energia associata. Studieremo qui le correzioni al valore, previsto dalla teoria di Dirac, del fattore g dei leptoni. Come si vede dalla (9.15), il fattore g è una costante di proporzionalità che lega il momento magnetico $\vec{\mu}$ al numero quantico del momento angolare e ad una unità fondamentale magnetica, generalmente il magnetone di Bohr o il magnetone nucleare. Noi ci soffermeremo sul momento magnetico di spin e quindi sul fattore g associato al momento angolare di spin. Il fattore g non va confuso col fattore g_L di Landè: quest'ultimo è associato al momento angolare totale e non a quello di spin.

Come sappiamo, la teoria di Dirac si riduce, nel limite non relativistico all'equazione di Pauli con accoppiamento campo magnetico-momento magnetico della forma

$$H_{acc} \vec{\mu} \vec{B} = \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} = 2 \frac{e}{2m} \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{B} = 2 \mu_{Bohr} \vec{S} \cdot \vec{B}$$

in cui viene previsto un valore del fattore g esattamente uguale a 2. Questo valore, quando confrontato con i dati sperimentali differisce di una quantità detta momento magnetico anomalo ed espressa, generalmente, come $a = \frac{g-2}{2}$ ed è una quantità dell'ordine dello 0,1% di g . Le correzioni quantistiche al valore predetto da Dirac sono dovute alle interazioni; tutte e tre le forze fondamentali giocano un ruolo in queste correzioni (potrebbero esserci anche correzioni dovute a nuova fisica, non possiamo escluderlo a priori), tuttavia noi ci soffermeremo solo sulle correzioni dovute alla spQED che sono le più contribuenti. I diagrammi che portano le correzioni dalla spQED possono essere classificati in base all'ordine in α_{EM} ; al primo ordine abbiamo un solo diagramma correttivo (la correzione al vertice), al secondo ordine 7 diagrammi, al terzo 72 diagrammi e al quarto 891 diagrammi; ovviamente noi ci fermeremo al primo ordine, calcolato per la prima volta da Schwinger nel 1948.

9.3.1 Il calcolo al primo ordine

In questa sezione otterremo la correzione al primo ordine della costante di struttura fine del fattore $g = 2$ della teoria di Dirac.

Preliminari

La forma più generale della funzione di vertice che descrive l'accoppiamento tra un fotone ed un fermione (o antifermione sostituendo gli spinori u con v) on shell è data da

$$\bar{u}(\mathbf{p}', s')\Lambda^\mu u(\mathbf{p}, s) = \bar{u}(\mathbf{p}', s')[A_1(q^2)\gamma^\mu + A_2(q^2)p^\mu + A_3(q^2)p^{\mu'} + A_4(q^2)\sigma^{\mu\nu}p_\nu + A_5(q^2)\sigma^{\mu\nu}p'_\nu]u(\mathbf{p}, s),$$

in cui $q^\mu = p^{\mu'} - p^\mu$. La forma appena scritta è frutto del fatto che il primo membro è un quadrivettore e quindi deve esserlo anche il secondo; per cui dobbiamo costruire tutti i possibili quadrivettori indipendenti:

- γ^μ ;
- $q^\mu = p^{\mu'} - p^\mu$;
- p^μ ;
- $p^{\mu'}$;
- $p^{\mu'} + p^\mu$;
- $\sigma^{\mu\nu}q_\nu$;
- $\sigma^{\mu\nu}p_\nu$;
- $\sigma^{\mu\nu}p'_\nu$;
- $\sigma^{\mu\nu}(p'_\nu + p_\nu)$;

tuttavia è possibile mostrare (fatto in **Appendice J**) che molte di queste combinazioni non sono indipendenti e quindi possiamo restringerci alle sole che compaiono nella prima equazione del paragrafo.

Poichè, dalla (8.17), sappiamo che

$$\bar{u}(\mathbf{p}', s')\Lambda^\mu(\mathbf{p}, s) = C\bar{u}(\mathbf{p}', s')\gamma^\mu u(\mathbf{p}, s) \Rightarrow q_\mu\bar{u}(\mathbf{p}', s')\Lambda^\mu(\mathbf{p}, s) = 0,$$

abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= q_\mu\bar{u}(\mathbf{p}', s')\Lambda^\mu(\mathbf{p}, s) = \\ &= (p'_\mu - p_\mu)\bar{u}(\mathbf{p}', s')[A_1(q^2)\gamma^\mu + A_2(q^2)p^\mu + A_3(q^2)p^{\mu'} + A_4(q^2)\sigma^{\mu\nu}p_\nu + A_5(q^2)\sigma^{\mu\nu}p'_\nu]u(\mathbf{p}, s) = \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}', s')[A_1\not{p}' - A_1\not{p} + A_2p'p - A_2m^2 + A_3m^2 - A_3pp' + \\ &+ A_4\sigma^{\mu\nu}p_\nu p'_\mu - A_4\sigma^{\mu\nu}p_\nu p_\mu + A_5\sigma^{\mu\nu}p'_\nu p'_\mu - A_5\sigma^{\mu\nu}p'_\nu p_\mu]u(\mathbf{p}, s) = \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}', s')[A_1m - A_1m - A_2(m^2 - p'p) + A_3(m^2 - pp') + A_4\sigma^{\mu\nu}p_\nu p'_\mu - A_5\sigma^{\mu\nu}p'_\nu p_\mu]u(\mathbf{p}, s) = \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}', s')[-A_2(m^2 - p'p) + A_3(m^2 - pp') + A_4\sigma^{\mu\nu}p_\nu p'_\mu - A_5\sigma^{\mu\nu}p'_\nu p_\mu]u(\mathbf{p}, s) = \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}', s')[-A_2(m^2 - p'p) + A_3(m^2 - pp') + A_4\sigma^{\mu\nu}p_\nu p'_\mu - A_5\sigma^{\mu\nu}p'_\nu p_\mu]u(\mathbf{p}, s) = \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}', s')[-A_2(m^2 - p'p) + A_3(m^2 - pp') + A_4\sigma^{\mu\nu}p_\nu p'_\mu + A_5\sigma^{\mu\nu}p'_\nu p_\mu]u(\mathbf{p}, s) \Rightarrow \\ &\Rightarrow A_2 = A_3, \quad A_4 = -A_5; \end{aligned}$$

in cui nel quarto passaggio si sono utilizzate le equazione del moto ($\bar{u}\not{p}' = \bar{u}m$ e $\not{p}u = mu$), messo in evidenza A_2 e A_3 e notato che l'ottavo e nono addendo sono nulli perchè sono la contrazione di un tensore simmetrico (il prodotto degli impulsi) ed uno antisimmetrico (il $\sigma^{\mu\nu}$), nel sesto passaggio si sono rinominati gli indici di somma dell'ultimo addendo ($\nu \rightarrow \mu$ e $\mu \rightarrow \nu$), nel settimo passaggio abbiamo usato l'antisimmetria del tensore $\sigma^{\mu\nu}$.

Utilizzando queste informazioni nella prima equazione del paragrafo, si ottiene

$$\begin{aligned}\bar{u}(\mathbf{p}', s')\Lambda^\mu u(\mathbf{p}, s) &= \bar{u}(\mathbf{p}', s')(A_1\gamma^\mu + A_2[p^\mu + p^{\mu'}] + A_4\sigma^{\mu\nu}[p'_\nu - p_\nu])u(\mathbf{p}, s) = \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}', s')([A_1\gamma^\mu + A_2[p^\mu + p^{\mu'}] + A_4\sigma^{\mu\nu}q_\nu]u(\mathbf{p}, s));\end{aligned}\quad (9.16)$$

a questo punto, usufruiamo della decomposizione di Gordon espressa dalla prima equazione dalle (J.2), ossia

$$2m\bar{u}(\mathbf{p}', s')\gamma^\mu u(\mathbf{p}, s) = \bar{u}(\mathbf{p}', s')[(p' + p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}q_\nu]u(\mathbf{p}, s),$$

per scrivere la (9.16) nella forma

$$\bar{u}(\mathbf{p}', s')\Lambda^\mu u(\mathbf{p}, s) = \bar{u}(\mathbf{p}', s')\left[F_1(q^2)\gamma^\mu + F_2(q^2)\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\right]u(\mathbf{p}, s),\quad (9.17)$$

questa riscrittura è ragionevole, infatti se guardiamo la decomposizione di Gordon vediamo che il termine contenente $p^\mu + p^{\mu'}$ della (9.16) è esprimibile in termini solo di γ^μ e $\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ che, combinati con gli altri termini uguali che compaiono nella (9.16) permettono la scrittura della (9.17). Le funzioni F_1 e F_2 non sono conosciute a questo livello e sono detti fattori di forma di Pauli (i fattori di forma in generale sono brevemente approfonditi in **Appendice K**); tuttavia nel secondo addendo della (9.17) abbiamo tenuto manifesta la presenza del fattore $\frac{i}{2m}$, in cui la i deriva dal fatto che A_4 deve essere immaginaria per via dell'ermitianità della (9.16) mentre il fattore $\frac{1}{2m}$ viene dalla decomposizione di Gordon.

D'altro canto, sappiamo che possiamo scrivere $\Lambda^\mu = C\gamma^\mu + \Lambda_c^\mu$ in cui, nel limite $q^\mu \rightarrow 0$ (ossia $p'^\mu \rightarrow p^\mu$), $\bar{u}(\mathbf{p}, s)\Lambda_c^\mu u(\mathbf{p}, s) = 0$ e quindi in questo limite abbiamo

$$\bar{u}(\mathbf{p}, s)\Lambda^\mu u(\mathbf{p}, s) = \bar{u}(\mathbf{p}, s)C\gamma^\mu + \Lambda_c^\mu u(\mathbf{p}, s) = \bar{u}(\mathbf{p}, s)C\gamma^\mu u(\mathbf{p}, s) = \bar{u}(\mathbf{p}, s)F_1(0)\gamma^\mu u(\mathbf{p}, s) \Rightarrow C = F_1(0).$$

Se calcoliamo la (9.17) omettendo i termini di ordine q^2 possiamo scrivere la corrente corretta che attraversa il vertice come

$$\begin{aligned}e\bar{u}(\mathbf{p}, s)(\gamma^\mu + e^2\Lambda^\mu)u(\mathbf{p}, s) &= e\bar{u}(\mathbf{p}, s)\left[\gamma^\mu + e^2F_2(0)\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\right]u(\mathbf{p}, s) = \\ &= e\bar{u}(\mathbf{p}, s)\left[\left(\frac{(p'^\mu + p^\mu)}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\right) + e^2F_2(0)\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\right]u(\mathbf{p}, s) = \\ &= e\bar{u}(\mathbf{p}, s)\left[\frac{(p'^\mu + p^\mu)}{2m} + (1 + e^2F_2(0))\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\right]u(\mathbf{p}, s),\end{aligned}\quad (9.18)$$

in cui abbiamo usato la decomposizione di Gordon (prima delle equazioni (J.2)) e non abbiamo tenuto conto del termine $C\gamma^\mu$ della (9.17) dato che, per l'identità di Ward, questo produce una correzione che si semplifica con la correzione del propagatore fermionico. Accoppiando la (9.18) al campo EM si vede (prendendone il limite non relativistico) che il primo termine rappresenta l'interazione della particella attraverso la carica (avremmo lo stesso termine nel caso di altri campi carichi ma, ovviamente, con diversi possibili valori della carica) mentre il secondo termine ricostruisce l'interazione del momento magnetico, che nella (9.18) è pari a $\frac{e}{2m}2(1 + e^2F_2(0))\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2}$ da cui vediamo che il fattore g viene corretto; infatti:

$$g = 2(1 + 4\pi\alpha_{EM}F_2(0))\quad (9.19)$$

e il momento magnetico anomalo è pari a

$$a = \frac{g - 2}{2} = 4\pi\alpha_{EM}F_2(0).$$

Calcolo vero e proprio

Veniamo al calcolo della correzione. La grandezza da calcolare è data da (guardando la (8.15))

$$\begin{aligned}\bar{u}(\mathbf{p}', s')\Lambda^\mu u(\mathbf{p}, s) &= \bar{u}(\mathbf{p}', s') \left(\frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \gamma_\alpha \right) u(\mathbf{p}, s) = \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}', s') \left(\frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{\gamma^\alpha (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\alpha}{(k^2 + i\epsilon)((p' - k)^2 - m^2 + i\epsilon)((p - k)^2 - m^2 + i\epsilon)} \right) u(\mathbf{p}, s).\end{aligned}\quad (9.20)$$

Notiamo che

$$\begin{aligned}q^2 &= (p' - p)^2 = 2m - 2p'p; \\ (p' + p)^2 &= 2m^2 + 2p'p = 4m^2 - q^2;\end{aligned}$$

e definiamo

$$Q := \frac{p' + p}{2} \Rightarrow p' = \frac{p' + p + p' - p}{2} = Q + \frac{q}{2}, \quad p = \frac{p' + p - (p' - p)}{2} = Q - \frac{q}{2}.$$

Lavoriamo sul denominatore della (9.20) (non riportiamo gli $i\epsilon$, irrilevanti per il conto):

$$\begin{aligned}k^2\{[(p' - k)^2 - m^2][(p - k)^2 - m^2]\} &= k^2[(p'^2 + k^2 - 2p'k - m^2)(p^2 + k^2 - 2pk - m^2)] = \\ &= k^2[(k^2 - 2p'k)(k^2 - 2pk)] = k^2[k^4 - 2pk^3 - 2p'k^3 + 4p'pk^2] = \\ &= k^2\left[k^4 - 2Qk^3 + qk^3 - 2Qk^3 - qk^3 + 4\left(Q + \frac{q}{2}\right)\left(Q - \frac{q}{2}\right)k^2\right] = \\ &= k^2[(k^2 - 2Qk)^2 - q^2k^2];\end{aligned}\quad (9.21)$$

nel paragrafo precedente abbiamo ommesso i termini di ordine q^2 per cui faremo lo stesso anche qui. Inserendo la (9.21) nella (9.20) si ha

$$\bar{u}(\mathbf{p}', s')\Lambda^\mu u(\mathbf{p}, s) = \bar{u}(\mathbf{p}', s') \left(\frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{\gamma^\alpha (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\alpha}{[k^2 + i\epsilon][(k^2 - 2Qk + i\epsilon)^2]} \right) u(\mathbf{p}, s); \quad (9.22)$$

a questo punto usiamo la parametrizzazione di Feynman per riscrivere il denominatore, nello specifico (con riferimento alla generalizzazione della (9.8)) useremo

$$\frac{1}{A_1 A_2^2} = \int_0^1 dx dy \delta(1 - x - y) \frac{y}{(xA_1 + yA_2)^3} \Gamma(3) = 2 \int_0^1 dy \frac{y}{[A_1 + y(A_2 - A_1)]^3},$$

per cui, definendo $N^\mu(k, p', p) := \gamma^\alpha (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\alpha$, abbiamo

$$\begin{aligned}\bar{u}(\mathbf{p}', s')\Lambda^\mu u(\mathbf{p}, s) &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_0^1 2y dy \int d^4k \frac{\bar{u}(\mathbf{p}', s') N^\mu(k, p', p) u(\mathbf{p}, s)}{[k^2 + y(k^2 - 2Qk - k^2) + i\epsilon]^3} = \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_0^1 2y dy \int d^4k \frac{\bar{u}(\mathbf{p}', s') N^\mu(k, p', p) u(\mathbf{p}, s)}{[k^2 - y2Qk + i\epsilon]^3} = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_0^1 2y dy \int d^4k \frac{\bar{u}(\mathbf{p}', s') N^\mu(k, p', p) u(\mathbf{p}, s)}{[(k - yQ)^2 - y^2Q^2 + i\epsilon]^3} = \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_0^1 2y dy \int d^4k \frac{\bar{u}(\mathbf{p}', s') N^\mu(k, p', p) u(\mathbf{p}, s)}{[(k - yQ)^2 - y^2m^2 + i\epsilon]^3} = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_0^1 2y dy \int d^4t \frac{\bar{u}(\mathbf{p}', s') N^\mu(t + yQ, p', p) u(\mathbf{p}, s)}{[t^2 - y^2m^2 + i\epsilon]^3},\end{aligned}\quad (9.23)$$

in cui nel terzo passaggio abbiamo completato il quadrato, nel quarto passaggio si è sfruttato il fatto che $Q^2 = m^2$ a meno di ordini di q^2 (che stiamo trascurando) e nell'ultimo passaggio si è utilizzato il cambio di variabili $t = k - yQ$ nel secondo integrale. Riprendendo la definizione di $N^\mu(t + yQ, p', p)$ notiamo che

esso conterrà termini che non contengono \not{t} , e che possono essere portati fuori dall'integrazione; termini lineari in \not{t} che danno, però, contributo nullo all'integrale per simmetria; infine compaiono anche termini quadratici in \not{t} che contribuiscono con integrali della forma

$$\int d^4t \frac{\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\gamma \gamma_\alpha t_\beta t_\gamma}{(t^2 - y^2 m^2 + i\epsilon)^3} = \int d^4t \frac{\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\gamma \gamma_\alpha g_{\beta\gamma} t^2}{(t^2 - y^2 m^2 + i\epsilon)^3} \propto \gamma^\mu,$$

per cui omettibili dato che siamo interessati al termine convergente, mentre questi termini contribuiscono al termine divergente che è destinato ad essere rinormalizzato. Quindi possiamo, a tutti gli effetti per i nostri scopi, considerare $N^\mu(t + yQ, p', p) = N^\mu(yQ, p', p)$, ossia come se t non comparisse. La (9.23) diviene

$$\bar{u}(\mathbf{p}', s') \Lambda^\mu u(\mathbf{p}, s) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_0^1 2y dy \bar{u}(\mathbf{p}', s') N^\mu(yQ, p', p) u(\mathbf{p}, s) \int d^4t \frac{1}{[t^2 - y^2 m^2 + i\epsilon]^3},$$

l'integrale residuo in t si svolge con l'ausilio della (9.6) in cui $s = y^2 m^2$ ed è pari a

$$I(y^2 m^2, 4, 3) = i(-1)^3 \frac{\pi^2}{\Gamma(3)} \frac{\Gamma(1)}{(y^2 m^2)} = -i \frac{\pi^2}{2y^2 m^2},$$

e otteniamo

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}', s') \Lambda^\mu u(\mathbf{p}, s) &= \int_0^1 2y dy -i \frac{\pi^2}{2y^2 m^2} \frac{-i}{(2\pi)^4} \bar{u}(\mathbf{p}', s') N^\mu(yQ, p', p) u(\mathbf{p}, s) = \\ &= \frac{-1}{16\pi^2 m^2} \int_0^1 \frac{dy}{y} \bar{u}(\mathbf{p}', s') N^\mu(yQ, p', p) u(\mathbf{p}, s). \end{aligned} \quad (9.24)$$

A questo punto calcoliamo esplicitamente il termine con struttura spinoriale sfruttando le proprietà delle matrici gamma (prevalentemente il fatto di poter scambiare γ^μ con γ^α grazie all'anticommutatore per poi usare il fatto che $\gamma^\alpha \gamma_\alpha = 4$) ottenendo

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}', s') N^\mu(yQ, p', p) u(\mathbf{p}, s) &= \bar{u}(\mathbf{p}', s') \gamma^\alpha \left(\not{p}' - \frac{y(\not{p}' + \not{p})}{2} + m \right) \gamma^\mu \left(\not{p} - \frac{y(\not{p}' + \not{p})}{2} + m \right) \gamma_\alpha u(\mathbf{p}, s) = \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}, s') \left[-2 \left(\not{p}' - \frac{y(\not{p}' + \not{p})}{2} \right) \gamma^\mu \left(\not{p}' - \frac{y(\not{p}' + \not{p})}{2} \right) + 4m(1-y)(p' + p)^\mu - 2m^2 \gamma^\mu \right] u(\mathbf{p}, s) = \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}', s') \left[4m(1-y) \left(1 - \frac{y}{2} \right) \frac{1}{2} [\not{q}, \gamma^\mu] + 4m(1-y)(p + p')^\mu \right] u(\mathbf{p}, s); \end{aligned}$$

usando la relazione $[\not{q}, \gamma^\mu] = 2i\sigma^{\mu\nu} q_\nu$ e la decomposizione di Gordon solita, possiamo scrivere (sempre omettendo i termini proporzionali a γ^μ che vengono fuori dall'utilizzo della decomposizione di Gordon)

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}', s') N^\mu(yQ, p', p) u(\mathbf{p}, s) &= \bar{u}(\mathbf{p}', s') \left[4m(1-y) \left(1 - \frac{y}{2} \right) i\sigma^{\mu\nu} q_\nu + 4m(1-y)(p + p')^\mu \right] u(\mathbf{p}, s) = \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}', s') \left[4m(1-y) \left(1 - \frac{y}{2} \right) i\sigma^{\mu\nu} q_\nu + 4m(1-y)(-i\sigma^{\mu\nu} q_\nu) \right] u(\mathbf{p}, s) = \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}', s') \left[-4m(1-y) \frac{y}{2} i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u(\mathbf{p}, s) = \bar{u}(\mathbf{p}', s') \left[-2m(1-y) y i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u(\mathbf{p}, s). \end{aligned} \quad (9.25)$$

Con questa scrittura la (9.23) diventa

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}', s') \Lambda^\mu u(\mathbf{p}, s) &= \frac{-1}{16\pi^2 m^2} \int_0^1 \frac{dy}{y} \bar{u}(\mathbf{p}', s') \left[-2m(1-y) y i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u(\mathbf{p}, s) = \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}', s') \left[\frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{8\pi^2 m} \int_0^1 (1-y) dy \right] u(\mathbf{p}, s) = \bar{u}(\mathbf{p}', s') \left[\frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{8\pi^2 m} \left(1 - \frac{1}{2} \right) dy \right] u(\mathbf{p}, s) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{u}(\mathbf{p}', s') e^2 \Lambda^\mu u(\mathbf{p}, s) = \bar{u}(\mathbf{p}', s') \left[\frac{e^2 i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{16\pi^2 m} \right] u(\mathbf{p}, s); \end{aligned} \quad (9.26)$$

confrontando con la (9.18) vediamo che

$$e^2 F_2(0) = \frac{e^2}{8\pi^2} = \frac{\alpha_{EM}}{2\pi} \simeq 0,0011617, \quad (9.27)$$

per cui otteniamo $g = 2(1 + \frac{\alpha_{EM}}{2\pi}) \simeq 2,0023234$.

9.4 Calcolo ad un loop dell'auto energia dei fermioni di Dirac

In questa sezione vogliamo calcolare l'autoenergia dei fermioni di Dirac al primo ordine. Consideriamo la figura sottostante ed esplicitiamo il diagramma

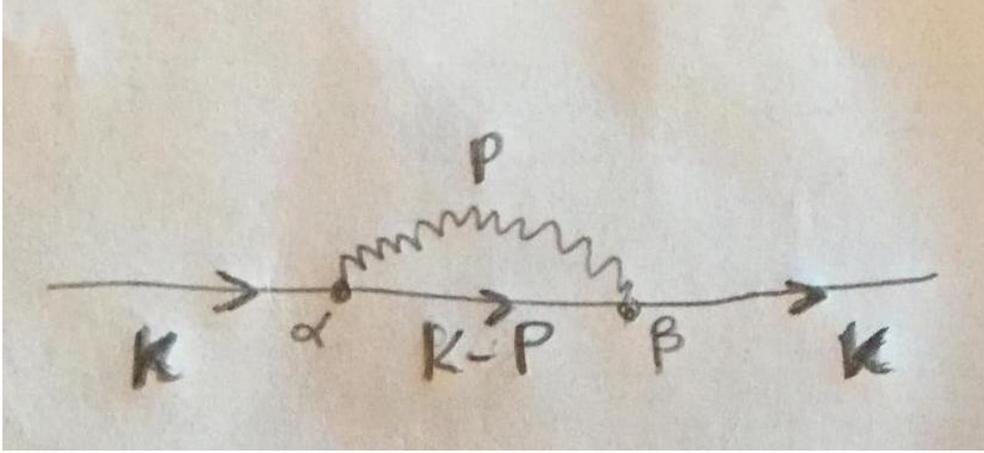


Figura 9.3: *Correzione di auto energia del propagatore fermionico.*

$$\begin{aligned} i\Sigma(k)_{LOOP} &= \frac{(ie)^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \gamma_\alpha \frac{-i\eta^{\alpha\beta}}{p^2 + i\epsilon} \frac{i}{(k-p) - m + i\epsilon} \gamma_\beta = \frac{(ie)^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \gamma_\alpha \frac{1}{p^2 + i\epsilon} \frac{1}{(k-p) - m + i\epsilon} \gamma^\alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \Sigma(k)_{1LOOP} &= \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{1}{p^2 + i\epsilon} \frac{\gamma_\alpha [(k-p) + m] \gamma^\alpha}{(k-p)^2 - m^2 + i\epsilon}; \end{aligned} \quad (9.28)$$

la (9.28) ha una divergenza logaritmica nella regione ultravioletta dello spettro del fotone; ma possiede anche una divergenza infrarossa a causa del propagatore fotonico. Utilizziamo la regolarizzazione di Pauli-Villars nella quale si pone

$$\frac{1}{p^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{p^2 + i\epsilon} - \frac{1}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon},$$

e si recupera il propagatore originale prendendo il limite $\mu \rightarrow \infty$ (detto hard cutoff); la (9.28) si riscrive

$$\Sigma(k)_{1LOOP} = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \left[\frac{1}{p^2 + i\epsilon} - \frac{1}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon} \right] \frac{\gamma_\alpha [(k-p) + m] \gamma^\alpha}{(k-p)^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (9.29)$$

Utilizziamo la parametrizzazione di Feynman (9.7) per riscrivere i denominatori e le proprietà delle gamma di Dirac $\gamma_\alpha \gamma^\alpha = 4$ e $\gamma_\alpha \gamma^\rho \gamma^\alpha = -2\gamma^\rho$ per riscrivere il numeratore

$$\begin{aligned} \Sigma(k)_{1LOOP} &= \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4p (-2(k-p) + 4m) \times \\ &\times \int_0^1 dx \left[\frac{1}{((p-kx)^2 + xk^2(1-x) - m^2x + i\epsilon)^2} - \frac{1}{((p-kx)^2 + xk^2(1-x) - m^2x - \mu^2(1-x) + i\epsilon)^2} \right]; \end{aligned}$$

a questo punto eseguiamo il cambio di variabile $q = p - kx$, dopodichè operiamo una rotazione di Wick e passiamo in coordinate ipersferiche; il risultato è

$$\begin{aligned} \Sigma(k)_{1LOOP} &= -\frac{e^2}{(2\pi)^4} 2\pi^2 \int_0^\infty q_E^3 dq_E (-2(k - p) + 4m) \times \\ &\times \int_0^1 dx \left[\frac{1}{(q_E^2 + xk^2(1-x) - m^2x + i\epsilon)^2} - \frac{1}{(q_E^2 + xk^2(1-x) - m^2x - \mu^2(1-x) + i\epsilon)^2} \right] = \\ &= -\frac{e^2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx (-2k(1-x) + 4m) \ln \left(\frac{xk^2(1-x) - m^2x - \mu^2(1-x)}{xk^2(1-x) - m^2x} \right); \end{aligned} \quad (9.30)$$

il fattore -1 deriva dal prodotto $i \times i$ dovuto alla rotazione di Wick, il $2\pi^2$ è l'angolo solido in 4 dimensioni dovuto al cambio di variabile in coordinate ipersferiche e l'integrale in q_E è svolto in **Appendice L**. Nello svolgere l'integrale della (9.30), il pezzo contenente il termine $-2q$ proveniente dal cambio di variabile applicato a $-2(k - p)$ si annulla per simmetria. Dalle condizioni (8.5) abbiamo:

$$\begin{aligned} \delta m &= \frac{1}{Z_2} \frac{e^2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx (-2m(1-x) + 4m) \ln \left(\frac{xm^2(1-x) - m^2x - \mu^2(1-x)}{xm^2(1-x) - m^2x} \right) = \\ &= \frac{1}{Z_2} \frac{e^2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx (-2m + 2mx + 4m) \ln \left(\frac{xm^2 - x^2m^2 - m^2x - \mu^2(1-x)}{xm^2 - x^2m^2 - m^2x} \right) = \\ &\frac{1}{Z_2} \frac{2me^2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx (1+x) \ln \left(\frac{x^2m^2 + \mu^2(1-x)}{x^2m^2} \right); \\ Z_2 - 1 &= -\frac{2e^2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left[(1-x) \ln \left(\frac{x^2m^2 + \mu^2(1-x)}{x^2m^2} \right) - \ln \left(\frac{2\mu^2(1-x)^2(1+x)}{x(m^2x^2 + \mu^2(1-x))} \right) \right]; \end{aligned}$$

in cui non abbiamo svolto esplicitamente la derivata, lasciata per esercizio. Dato che dovremo mandare ad infinito il regolarizzatore di Pauli-Villars, possiamo considerare direttamente il limite $\mu \rightarrow \infty$, ottenendo gli andamenti

$$\begin{aligned} \delta m &= \frac{1}{Z_2} \frac{2me^2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx (1+x) \ln \left(\frac{\mu^2(1-x)}{x^2m^2} \right); \\ Z_2 - 1 &= -\frac{2e^2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left[(1-x) \ln \left(\frac{\mu^2(1-x)}{x^2m^2} \right) - \frac{2(1-x^2)}{x} \right]. \end{aligned} \quad (9.31)$$

Mettendo tutto assieme abbiamo (sempre considerando l'andamento nel limite $\mu \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} \Sigma(k) &= (Z_2 - 1)(k - m) + Z_2\delta m + \Sigma(k)_{LOOP} = \\ &= \left(-\frac{2e^2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left[(1-x) \ln \left(\frac{\mu^2(1-x)}{x^2m^2} \right) - \frac{2(1-x^2)}{x} \right] \right) (k - m) + \\ &+ \frac{2me^2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx (1+x) \ln \left(\frac{\mu^2(1-x)}{x^2m^2} \right) + \\ &- \frac{e^2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx (-2k(1-x) + 4m) \ln \left(\frac{-\mu^2(1-x)}{xk^2(1-x) - m^2x} \right) = \\ &= -\frac{2e^2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx (1-x) \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) (k - m) + \left[(1-x) \ln \left(\frac{1-x}{x^2} \right) - \frac{2(1-x^2)}{x} \right] (k - m) + \\ &+ \frac{2e^2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx m(1+x) \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) + m(1+x) \ln \left(\frac{1-x}{x^2} \right) + \\ &- \frac{2e^2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx (-k(1-x) + 2m) \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) + (-k(1-x) + 2m) \ln \left(\frac{m^2(1-x)}{m^2x - xk^2(1-x)} \right); \end{aligned}$$

in cui abbiamo scritto $\ln\left(\frac{\mu^2(1-x)}{x^2 m^2}\right) = \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + \ln\left(\frac{(1-x)}{x^2}\right)$ e $\ln\left(\frac{-\mu^2(1-x)}{xk^2(1-x)-m^2x}\right) = \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + \ln\left(\frac{m^2(1-x)}{m^2x-xk^2(1-x)}\right)$. Dalla scrittura precedente di $\Sigma(\not{k})$, vediamo che i termini contenenti il regolarizzatore di Pauli-Villars si cancellano, in definitiva abbiamo

$$\begin{aligned} \Sigma(\not{k}) = & -\frac{2e^2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left\{ \left[(1-x)\ln\left(\frac{1-x}{x^2}\right) - \frac{2(1-x^2)}{x} \right] (\not{k} - m) - m(1+x)\ln\left(\frac{1-x}{x^2}\right) + \right. \\ & \left. + (2m - \not{k}(1-x))\ln\left(\frac{m^2(1-x)}{m^2x-xk^2(1-x)}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (9.32)$$

La (9.32) presenta ancora una divergenza infrarossa, residuo della divergenza del propagatore del fotone, ma non presenta divergenze ultraviolette. Ultime considerazioni: notiamo che la correzione alla massa del fermione di Dirac diverge logicamente invece che, come classicamente ci si aspetta, come $\frac{1}{r}$. Questo fatto è dovuto alla simmetria chirale della spQED: nel limite di massa nulla dei fermioni la spQED annette come simmetria la trasformazione $\psi(x) = e^{i\gamma_5\alpha}\psi(x)$. Dovendo annullarsi, nel limite chirale, anche la massa corretta esatta, questa deve essere proporzionale linearmente alla massa nuda (il parametro che compare nella densità di lagrangiana) e la dipendenza dal cutoff e quindi la divergenza legata al cutoff deve essere tale che nel limite chirale sia "sconfitta" dalla convergenza a zero della massa stessa. La divergenza deve essere logaritmica.

Appendice A

Lo spazio di Fock

Lo spazio di Fock prende il nome da Vladimir Fock, fisico sovietico, che lo introdusse per la prima volta nel 1932; è una costruzione algebrica usata nella meccanica quantistica, meccanica quantistica relativistica ed in teoria dei campi quantistici per costruire lo spazio degli stati quantistici di un numero variabile o sconosciuto di particelle identiche partendo dallo spazio di Hilbert, \mathbf{H} , di una singola particella. Lo spazio di Fock si può vedere come la somma di un insieme di spazi di Hilbert che rappresentano stati di zero particelle, stati di una particella, stati di due particelle e così via. Se le particelle identiche sono bosoni, gli stati di n particelle sono vettori in un prodotto tensoriale simmetrizzato di n spazi di Hilbert, \mathbf{H} , di singola particella. Se le particelle identiche sono fermioni, gli stati di n particelle sono vettori in un prodotto tensoriale antisimmetrizzato di n spazi di Hilbert, \mathbf{H} , di singola particella. Uno stato generale nello spazio di Fock è una combinazione lineare di stati n -particellari, uno per ogni n . Da un punto di vista più formale lo spazio di Fock si costruisce come

$$\mathbf{F}_\sigma(\mathbf{H}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_\sigma \mathbf{H}^{\otimes n} = \mathbf{C} \oplus \mathbf{H} \oplus S_\sigma(\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}) \oplus S_\sigma(\mathbf{H} \otimes \mathbf{H} \otimes \mathbf{H}) \oplus \dots \quad (\text{A.1})$$

in cui S_σ è l'operatore che simmetrizza o antisimmetrizza il prodotto tensoriale, a seconda che lo spazio di Hilbert descriva particelle che obbediscono alla statistica bosonica ($\sigma = +$) o fermionica ($\sigma = -$). In sostanza, come precedentemente detto, lo spazio di Fock è la somma diretta di prodotti tensoriali di coppie di uno spazio Hilbert di singola particella per cui può essere pensato come quello spazio i cui sottospazi sono gli spazi di Hilbert a zero, una, due, etc etc, particelle. Lo stato di vuoto fa parte dello spazio a zero particelle ossia lo spazio dei complessi \mathbf{C} .

Un vettore tipico dello spazio di Fock sarà definito come

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_\sigma &:= \bigoplus_{n=0}^{\infty} |\Psi_n\rangle_\sigma = |\Psi_0\rangle \oplus |\Psi_1\rangle \oplus |\Psi_2\rangle \oplus \dots \oplus |\Psi_n\rangle = \\ &a|0\rangle \oplus a_i|\psi_i\rangle \oplus \frac{a_{ij}}{\sqrt{2}}(|\psi_i\rangle \otimes |\psi_j\rangle + (\sigma)|\psi_j\rangle \otimes |\psi_i\rangle) \oplus \dots; \end{aligned}$$

in cui le costanti a etc etc appartengono al campo \mathbf{C} . Lo stato dello spazio di Fock appena descritto è una combinazione lineare di stati detti stati prodotto (o stati puri separabili); ossia quegli stati puri per cui vale, ad esempio supponendo di restringersi al sottospazio con $n = 2$ dello spazio di Fock,

$$|AB\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle = \sum_{ij} c_i^A |i\rangle \otimes c_j^B |j\rangle = \sum_i c_i^A |i\rangle \otimes \sum_j c_j^B |j\rangle = |A\rangle \otimes |B\rangle,$$

questa riscrittura è vera solo se per ogni coppia di indici i e j è possibile scrivere $c_{ij} = c_i^A c_j^B$; se questo non è possibile anche per una sola coppia di indici lo stato non sarà scrivibile nel modo precedente e si dirà stato

entangled. Un generale stato puro separabile si scriverà nella forma

$$|\psi_1 \dots \psi_n \rangle = |\psi_1 \rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n \rangle$$

e descrive uno stato a n particelle, in cui una ha stato di singola particella $|\psi_1 \rangle$, un'altra $|\psi_2 \rangle$ etc etc. Una base utile e conveniente per descrivere uno spazio di Fock è la base del numero di occupazione in cui si scrive un vettore che ci indica quante particelle si trovano nello stato $|\psi_1 \rangle$, quante nello stato $|\psi_2 \rangle$ etc etc. Questo vettore ci consente di scrivere lo stato nello spazio di Fock come

$$|n_1, n_2, \dots, n_k \rangle = |\psi_1 \rangle^{\otimes n_1} \otimes |\psi_2 \rangle^{\otimes n_2} \otimes \dots \otimes |\psi_k \rangle^{\otimes n_k} = |\psi_1 \rangle^{n_1} |\psi_2 \rangle^{n_2} \dots |\psi_k \rangle^{n_k}, \quad (\text{A.2})$$

nell'ultimo passaggio, con abuso di notazione, abbiamo ommesso il simbolo di prodotto tensoriale; bisogna sempre tenere a mente che non si tratta di semplici prodotti.

Generalmente lo spazio di Hilbert che si utilizza è lo spazio delle funzioni a quadrato sommabile sullo spazio \mathbf{X} e con misura di integrazione μ , $\mathbf{L}_2(\mathbf{X}, \mu)$. Su questo spazio possiamo definire gli spazi di Fock bosonico, $\mathbf{F}_+(\mathbf{L}_2(\mathbf{X}, \mu))$, e lo spazio di Fock fermionico, $\mathbf{F}_-(\mathbf{L}_2(\mathbf{X}, \mu))$. Lo spazio di Fock bosonico sarà lo spazio di Fock generato dalle funzioni simmetriche di $\mathbf{L}_2(\mathbf{X}, \mu)$ mentre lo spazio di Fock fermionico sarà lo spazio di Fock generato dalle funzioni antisimmetriche di $\mathbf{L}_2(\mathbf{X}, \mu)$. Per finire, date n funzioni di $\mathbf{L}_2(\mathbf{X}, \mu)$, $\psi_1(x_1, s_1), \dots, \psi_n(x_n, s_n)$, possiamo costruire un vettore appartenente a $\mathbf{F}_-(\mathbf{L}_2(\mathbf{X}, \mu))$ tramite il determinante di Slater e uno appartenente a $\mathbf{F}_+(\mathbf{L}_2(\mathbf{X}, \mu))$ tramite il permanente di Slater; in formule

$$\begin{aligned} \Psi_-(x_1, s_1, \dots, x_n, s_n) &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \det \begin{bmatrix} \psi_1(x_1, s_1) & \cdots & \psi_n(x_1, s_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(x_n, s_n) & \cdots & \psi_n(x_n, s_n) \end{bmatrix}; \\ \Psi_+(x_1, s_1, \dots, x_n, s_n) &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \text{per} \begin{bmatrix} \psi_1(x_1, s_1) & \cdots & \psi_n(x_1, s_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(x_n, s_n) & \cdots & \psi_n(x_n, s_n) \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

È importante ricordare che nello stesso spazio di Fock, tutte le particelle sono identiche (e conseguentemente indistinguibili) e per descrivere molte specie di particelle, è necessario considerare il prodotto tensoriale di tanti spazi di Fock quanti sono le specie di particelle in esame.

Appendice B

Algebra esterna e algebra di Clifford

In questa sezione vogliamo sviluppare, seppur molto brevemente, due importanti algebre utilizzate in fisica teorica. Per prima cosa, definiamo cos'è un'algebra: si intende uno spazio vettoriale \mathbf{V} su un certo campo \mathbf{K} (non è strettamente richiesto che \mathbf{K} sia un campo, può anche essere un anello) dotato di una operazione n -naria (ossia che vuole n argomenti in entrata) che sia compatibile con le operazioni preesistenti del campo (o dell'anello). Ricordiamo che in algebra astratta, un campo è una struttura algebrica composta da un insieme non vuoto \mathbf{K} e da due operazioni binarie interne (sotto le quali \mathbf{K} è chiuso) chiamate somma (+) e prodotto (*) in cui i gruppi additivi e moltiplicativo sono abeliani. Per anello si intende invece una struttura algebrica composta da un insieme non vuoto \mathbf{K} e da due operazioni binarie interne (sotto le quali \mathbf{K} è chiuso) chiamate somma (+) e prodotto (*) in cui il gruppo additivo è abeliano mentre la struttura $(\mathbf{K}, *)$ è un monoide (struttura in cui il prodotto è associativo ma non commutativo ed esiste l'elemento inverso). Nel prosieguo si assumono campi e anelli a caratteristica diversa da 2. È importante definire due tipologie di algebra:

- Algebre Commutative: sono algebre il cui campo o anello possiede un prodotto (*) commutativo;
- Algebre non commutative: sono algebre il cui anello possiede un prodotto (*) non commutativo (non può essere definita su un campo perchè questo deve possedere per costruzione un gruppo moltiplicativo commutativo), sono dette anche algebre quantistiche.

B.1 L'algebra esterna

A questo punto possiamo definire l'algebra esterna detta anche algebra di Grassman. Si definisce algebra esterna $\Lambda^*(\mathbf{V})$ di uno spazio vettoriale \mathbf{V} su campo \mathbf{K} , il sistema algebrico il cui prodotto aggiuntivo è detto prodotto esterno (\wedge) e possiede le seguenti proprietà

- Scambiando due variabili si cambia il segno del prodotto: $v_i \wedge \dots \wedge v_j \wedge \dots \wedge v_n = -v_j \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_n$;
- È multilineare ossia lineare in ogni argomento separatamente;
- È alternante: se due variabili sono uguali il prodotto esterno è nullo: $v_i \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_n = -v_i \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_n = 0$;
- Dalle ultime due segue che se due vettori del prodotto esterno sono linearmente indipendenti, il prodotto è identicamente nullo.

In maniera più formale e generale si definisce algebra di Grassman dello spazio \mathbf{V} la somma diretta degli spazi $\Lambda^k(\mathbf{V})$ con $k = 0, 1, 2, \dots, n$ munita del prodotto esterno (anche detto prodotto wedge):

$$\Lambda^\bullet(\mathbf{V}) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(\mathbf{V}) = \Lambda^0(\mathbf{V}) \oplus \Lambda^1(\mathbf{V}) \oplus \dots \oplus \Lambda^n(\mathbf{V}) \quad (\text{B.1})$$

in cui $\Lambda(\mathbf{V}) = \frac{T^k(\mathbf{V})}{\mathcal{A}^k(\mathbf{V})}$; $T^k(\mathbf{V})$ è l'algebra tensoriale su \mathbf{V} (ossia lo spazio generato da tutti i tensori fino a quello di rango k munito dell'ordinario prodotto tensoriale) e $\mathcal{A}^k(\mathbf{V})$ è lo spazio generato dai tensori della forma $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_k$ ($v_i \in \mathbf{V}$ e $\mathcal{A}^k(\mathbf{V}) \in T^k(\mathbf{V})$). In sostanza, l'algebra di Grassman, è la somma diretta degli spazi quoziente dell'algebra tensoriale di ordine k collassata sui sottospazi formati dalle k -adi (ossia dai tensori costruiti come prodotto tensoriale di k vettori). Detto questo, il prodotto wedge si definisce quindi come mappa dall'algebra tensoriale all'algebra di Grassman

$$\begin{aligned} W : T(\mathbf{V}) &\rightarrow \Lambda^\bullet(\mathbf{V}) \\ W(\alpha \otimes \beta) &= \alpha \wedge \beta \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

in cui $a, b \in \Lambda^\bullet(\mathbf{V})$ e $\alpha, \beta \in T(\mathbf{V})$. È immediato convincersi (vedendo le proprietà del prodotto esterno sopra elencate) che le variabili di Grassman, munite dell'ordinaria operazione di moltiplicazione, formino un'algebra esterna. L'importanza delle algebre di Grassman risiede nel fatto che l'algebra esterna rispetto ai numeri complessi è il prototipo di una superalgebra, che svolge un ruolo fondamentale nelle teorie fisiche relative ai fermioni e alla supersimmetria. Come già detto poco fa le variabili anticommutanti di Grassman generano quella che è detta algebra di Grassman o algebra esterna.

B.2 L'algebra di Clifford

Veniamo all'algebra di Clifford; di cui parleremo molto brevemente. Un'algebra di Clifford, $\mathcal{CL}(\mathbf{V}, Q)$, è un'algebra associativa unitaria che contiene ed è generata da uno spazio vettoriale \mathbf{V} su un campo \mathbf{K} , in cui lo spazio vettoriale \mathbf{V} è dotato di una forma quadratica $Q : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{K}$. Ricordiamo che una forma quadratica è una mappa dallo spazio vettoriale al campo su cui è costruito lo spazio vettoriale tale che

- $Q(av) = a^2v$ per ogni $a \in \mathbf{K}$ e per ogni $v \in \mathbf{V}$;
- $Q(v_1 + v_2) - Q(v_1) - Q(v_2)$ è una forma bilineare (lineare in entrambi gli argomenti separatamente);
- $Q(v_1, \dots, v_n) = \sum_i \sum_j a_{ij} v_i v_j$ con $a_{ij} \in \mathbf{K}$ e $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{V}$.

Le algebre di Clifford sono strettamente correlate alle algebre esterne. Infatti, se $Q \equiv 0$ allora l'algebra di Clifford $\mathcal{CL}(\mathbf{V}, Q)$ è l'algebra esterna $\Lambda^\bullet(\mathbf{V})$. Per Q diverso da zero esiste un isomorfismo (un'applicazione biunivoca tale che l'applicazione stessa e la sua inversa conservino le operazioni definite nelle due strutture algebriche) lineare tra $\Lambda^\bullet(\mathbf{V})$ e $\mathcal{CL}(\mathbf{V}, Q)$, ossia sono isomorfi come spazi vettoriali, ma con diverse operazioni di prodotto. Nello specifico, l'algebra di Clifford è la "quantizzazione" dell'algebra di Grassman, intendendo che può essere definita anche su anelli non commutativi.

Ogni forma quadratica non degenera su uno spazio vettoriale reale a dimensioni finite è equivalente alla forma diagonale standard

$$Q(v) = v_1^2 + \dots + v_p^2 - v_{p+1}^2 - \dots - v_{p+q}^2 \quad (\text{B.3})$$

in cui (p, q) è la segnatura della forma quadratica. Una prima applicazione importante delle algebre di Clifford si trova nelle matrici gamma di Dirac. Le regole di anticommutazione ci dicono che (adottando la segnatura (3,1))

$$2(\gamma_0)^2 = -2, \quad 2(\gamma_i)^2 = 2$$

per cui l'algebra di Clifford per una forma quadratica su spazio reale con segnatura (3,1) ci dà

$$Q(\gamma_0) = (\gamma_0)^2 + (\gamma_0)^2 + (\gamma_0)^2 + (\gamma_0)^2 = 2(\gamma_0)^2 = -2;$$

$$Q(\gamma_1) = (\gamma_1)^2 + (\gamma_1)^2 + (\gamma_1)^2 + (\gamma_1)^2 = 2(\gamma_1)^2 = 2;$$

$$Q(\gamma_2) = (\gamma_2)^2 + (\gamma_2)^2 + (\gamma_2)^2 + (\gamma_2)^2 = 2(\gamma_2)^2 = 2$$

$$Q(\gamma_3) = (\gamma_3)^2 + (\gamma_3)^2 + (\gamma_3)^2 + (\gamma_3)^2 = 2(\gamma_3)^2 = 2.$$

Per cui le regole di anticommutazione delle matrici gamma definiscono un'algebra di Clifford del tipo $\mathcal{C}\mathcal{L}_{(1,3)}(\mathbf{R}, Q)$, che è isomorfa (per la teoria delle classificazioni delle algebre di Clifford che non affronteremo) all'algebra delle matrici 4×4 complesse.

Appendice C

Un esempio del teorema di spin-statistica

In questa sezione vedremo un caso del teorema di spin-statistica, il quale asserisce che le particelle a spin intero debbano essere descritte da campi commutanti mentre le particelle a spin semintero da campi anticommutanti. Noi lo vedremo nel caso del campo di Dirac non interagente e del campo scalare complesso non interagente.

Cominciamo dal caso del campo di Dirac e calcoliamo la forma esplicita del propagatore a due punti (5.7) (moltiplicato per l'unità immaginaria)

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \mathcal{T}[\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)] | 0 \rangle &= \frac{(i\not{\partial} + m)_{\alpha\beta}}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} \frac{e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{2E_p} (e^{iE_p(x_0-y_0)}\theta(x_0-y_0) + e^{-iE_p(x_0-y_0)}\theta(y_0-x_0)) = \\
&= \frac{(i\not{\partial} + m)_{\alpha\beta}}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} \frac{1}{2E_p} (e^{-ip(x-y)}\theta(x_0-y_0) + e^{ip(x-y)}\theta(y_0-x_0)) = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{2E_p} (e^{-ip(x-y)}(\not{p} + m)_{\alpha\beta}\theta(x_0-y_0) + e^{ip(x-y)}(-\not{p} + m)_{\alpha\beta}\theta(y_0-x_0)) = \\
&= \frac{m}{E_p(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} (e^{-ip(x-y)} \left(\sum_{r=1}^2 u_{r,\alpha}(\mathbf{p}) \bar{u}_{r,\beta}(\mathbf{p}) \right) \theta(x_0-y_0) + e^{ip(x-y)} \left(- \sum_{s=1}^2 v_{s,\alpha}(\mathbf{p}) \bar{v}_{s,\beta}(\mathbf{p}) \right) \theta(y_0-x_0)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \langle 0 | \psi_\alpha(x) \psi_\beta^\dagger(y) | 0 \rangle \theta(x_0-y_0) + \langle 0 | \psi_\beta^\dagger(y) \psi_\alpha(x) | 0 \rangle \theta(y_0-x_0) = \\
&= \frac{m}{E_p(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} (e^{-ip(x-y)} \left(\sum_{r=1}^2 u_{r,\alpha}(\mathbf{p}) u_{r,\beta}^\dagger(\mathbf{p}) \right) \theta(x_0-y_0) + e^{ip(x-y)} \left(- \sum_{s=1}^2 v_{s,\alpha}(\mathbf{p}) v_{s,\beta}^\dagger(\mathbf{p}) \right) \theta(y_0-x_0)),
\end{aligned}$$

in cui nel secondo passaggio abbiamo effettuato il cambio di variabile $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ (solo per il primo addendo), nel terzo passaggio abbiamo sfruttato la scrittura dei proiettori nella teoria di Dirac e nei passaggi successivi abbiamo moltiplicato per γ_0 per trasformare le aggiunte di Dirac nei dagger. Inseriamo, a questo punto, l'identità scritta come somma completa sugli stati e poniamo $\alpha = \beta$ e $x \rightarrow y$

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \psi_\alpha(x) \left(\sum_q |q\rangle \langle q| \right) \psi_\alpha^\dagger(x) | 0 \rangle \theta(+0) + \langle 0 | \psi_\alpha^\dagger(x) \left(\sum_q |q\rangle \langle q| \right) \psi_\alpha(x) | 0 \rangle \theta(-0) &= \\
= \sum_q | \langle q | \psi^\dagger | 0 \rangle |^2 \theta(+0) + \sum_q | \langle q | \psi | 0 \rangle |^2 \theta(-0) &= \\
= \frac{m}{E_p(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} \left(\left(\sum_{r=1}^2 |u_{r,\alpha}(\mathbf{p})|^2 \right) \theta(+0) + \left(- \sum_{s=1}^2 |v_{s,\alpha}(\mathbf{p})|^2 \right) \theta(-0) \right);
\end{aligned}$$

possiamo eguagliare i coefficienti delle funzioni di Heaviside: dal coefficiente della $\theta(+0)$ non impariamo nulla (abbiamo una quantità positiva a destra ed a sinistra dell'uguale), dal coefficiente della $\theta(-0)$ otteniamo

invece

$$\langle 0|\psi_\alpha^\dagger(x)\left(\sum_q|q\rangle\langle q|\right)\psi_\alpha(x)|0\rangle = \sum_q|\langle q|\psi|0\rangle|^2 = -\frac{m}{E_p(2\pi)^2}\int d\mathbf{p}\sum_{s=1}^2|v_{s,\alpha}(\mathbf{p})|^2.$$

La relazione appena trovata è priva di senso dato che eguaglia una quantità definita positiva ad una definita negativa (l'unica soluzione sarebbe quella banale). Tuttavia se ammettessimo di poter anticommutare i campi troveremmo

$$-\langle 0|\psi_\alpha(x)\left(\sum_q|q\rangle\langle q|\right)\psi_\alpha^\dagger(x)|0\rangle = -\sum_q|\langle q|\psi|0\rangle|^2 = -\frac{m}{E_p(2\pi)^2}\int d\mathbf{p}\sum_{s=1}^2|v_{s,\alpha}(\mathbf{p})|^2,$$

il che ha decisamente più senso. Ne consegue che campi fermionici di Dirac devono anticommutare.

Vediamo il caso del campo scalare complesso: il propagatore si scrive come

$$\begin{aligned} &\langle 0|\mathcal{T}[\phi(x),\phi^\dagger(y)]|0\rangle = \\ &= \langle 0|\phi(x)\left(\sum_q|q\rangle\langle q|\right)\phi^\dagger(x)|0\rangle\theta(x_0-y_0) + \langle 0|\phi^\dagger(x)\left(\sum_q|q\rangle\langle q|\right)\phi(x)|0\rangle\theta(y_0-x_0) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{p}\frac{e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{2E_p}(e^{iE_p(x_0-y_0)}\theta(x_0-y_0) + e^{-iE_p(x_0-y_0)}\theta(y_0-x_0)) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{2E_p}(e^{-ip(x-y)}\theta(x_0-y_0) + e^{ip(x-y)}\theta(y_0-x_0)), \end{aligned}$$

anche in questo caso nel secondo passaggio abbiamo effettuato il cambio di variabile $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ (solo per il primo addendo) e inserito l'identità scritta come somma completa sugli stati. Poniamo $x \rightarrow y$ ed otteniamo

$$\begin{aligned} &\langle 0|\phi(x)\left(\sum_q|q\rangle\langle q|\right)\phi^\dagger(x)|0\rangle\theta(+0) + \langle 0|\phi^\dagger(x)\left(\sum_q|q\rangle\langle q|\right)\phi(x)|0\rangle\theta(-0) = \\ &\sum_q|\langle q|\phi^\dagger|0\rangle|^2\theta(+0) + \sum_q|\langle q|\phi|0\rangle|^2\theta(-0) = \\ &= \frac{1}{2E_p(2\pi)^3}\int d\mathbf{p}(\theta(+0) + \theta(-0)); \end{aligned}$$

eguagliando i coefficienti delle funzioni a gradino otteniamo due uguaglianze con entrambi i membri definiti positivi. I campi scalari devono commutare.

Il teorema di spin-statistica è uno dei risultati esatti della teoria dei campi; nella sua formulazione generale ci dice che i campi fermionici devono anticommutare (e sottostare alla statistica di Fermi-Dirac) mentre i campi bosonici devono commutare (e sottostare alla statistica di Bose-Einstein).

Appendice D

Le simmetrie del vuoto ed il teorema di Coleman

Discuteremo brevemente il teorema di Coleman legato alle simmetrie del vuoto. Consideriamo il caso in cui esistano una corrente e la carica associata $\hat{Q} = \int d\mathbf{x} j_0(x)$ tale che $\hat{Q}|0\rangle = 0$; allora le trasformazioni generate dalla carica Q sono simmetrie per il vuoto

$$e^{i\alpha(x)Q}|0\rangle = |0\rangle. \quad (\text{D.1})$$

Consideriamo uno stato generico con $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, grazie alle ipotesi abbiamo che

$$\begin{aligned} 0 &= iE_n \langle n, \mathbf{0} | \hat{Q}(t) | 0 \rangle = \langle n, \mathbf{0} | i\hat{H}\hat{Q}(t) | 0 \rangle = \langle n, \mathbf{0} | i\hat{H}e^{i\hat{H}t}\hat{Q}(0)e^{-i\hat{H}t} | 0 \rangle = \\ &= \langle n, \mathbf{0} | \frac{\hat{Q}(t)}{dt} | 0 \rangle = \langle n, \mathbf{0} | \int d\mathbf{x} \partial^0 j_0(x) | 0 \rangle = \langle n, \mathbf{0} | \int d\mathbf{x} \partial^\mu j_\mu(x) | 0 \rangle, \end{aligned}$$

in cui ricordiamo che l'operatore $\partial^\mu j_\mu(x)$ e lo stato di vuoto sono invarianti di Lorentz. Posta $\hat{U}(\Lambda)$ una generica trasformazione rappresentazione di una trasformazione di Lorentz, operando una trasformazione sugli stati e sull'operatore abbiamo che

$$0 = \langle n, \mathbf{0} | \hat{U}^\dagger(\Lambda) (\hat{U}(\Lambda) \partial^\mu j_\mu(x) \hat{U}^\dagger(\Lambda)) \hat{U}(\Lambda) | 0 \rangle = \langle n, \mathbf{0} | \hat{U}^\dagger(\Lambda) \partial^\mu j_\mu(x) | 0 \rangle. \quad (\text{D.2})$$

Poichè al variare di n e della trasformazione $\hat{U}(\Lambda)$ (o meglio al variare di Λ , ossia della trasformazione di Lorentz. stessa) possiamo raggiungere tutti gli stati possibili, segue, dalla (D.2), che lo stato $\partial^\mu j_\mu(x) | 0 \rangle$ è ortogonale a tutti gli stati; deve quindi essere necessariamente $\partial^\mu j_\mu(x) | 0 \rangle = 0$. Poichè, nella classe degli operatori locali, solo l'operatore nullo può annichilire il vuoto (teorema di Federbush e Johnson, 1960) segue la conservazione della corrente, $\partial^\mu j_\mu(x) = 0$.

Abbiamo quindi mostrato che se esiste una carica che annichila il vuoto, la corrente associata è conservata e le trasformazioni generate dalla carica sono simmetrie esatte per tutti gli stati. Il che significa che le simmetrie del vuoto sono le simmetrie dell'universo.

Appendice E

Il teorema di Furry

Il teorema di Furry è una diretta conseguenza della simmetria discreta di coniugazione di carica della spQED. La coniugazione di carica è quella simmetria che sostituisce una particella con la sua antiparticella, ed è implementata da una matrice unitaria ($\hat{C} = \hat{C}^{-1} = \hat{C}^\dagger$) tale che la sua doppia applicazione produce l'identità; sotto questa trasformazione ogni bilineare di Dirac trasforma prendendo un segno caratteristico:

- Scalare: $\hat{C}\bar{\psi}\psi\hat{C} = \bar{\psi}\psi$;
- Vettore: $\hat{C}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\hat{C} = -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$;
- Pseudoscalare: $\hat{C}\bar{\psi}\gamma^5\psi\hat{C} = \bar{\psi}\gamma^5\psi$;
- Tensore: $\hat{C}\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi\hat{C} = -\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$;
- Vettore assiale: $\hat{C}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi\hat{C} = \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$.

Il campo EM sotto la trasformazione di coniugazione di carica prende un segno meno, $\hat{C}A_\mu\hat{C} = -A_\mu$, dovuto al fatto che nel sostituire le particelle con le antiparticelle, si sostituiscono cariche positive con cariche negative e viceversa (\hat{C} è la trasformazione di coniugazione di carica che, per il campo EM, non sarà implementata dalla matrice \hat{C}).

Mostriamo che questa sia una simmetria della spQED: la densità della lagrangiana (7.1) si trasforma sotto coniugazione di carica come

$$\begin{aligned} \hat{C}\mathcal{L}_{spQED}\hat{C}^{-1} &= \hat{C}\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m_0)\psi\hat{C} - \frac{1}{4}\hat{C}(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)\hat{C}^{-1}\hat{C}(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu)\hat{C}^{-1} - \hat{C}\bar{\psi}(ie_0\mathcal{A})\psi\hat{C} = \\ &\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m_0)\psi - \frac{1}{4}(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) - \bar{\psi}(ie_0\mathcal{A})\psi = \mathcal{L}_{spQED}; \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

il che mostra come la coniugazione di carica lasci invariata la densità di lagrangiana.

A questo punto possiamo dimostrare il teorema di Furry. Consideriamo la seguente funzione di Green ad n punti $\langle 0|\mathcal{T}[j^\mu(x_1)\dots j^\mu(x_n)]|0\rangle$ ed inseriamo la coniugazione di carica tra ogni corrente scritta nella forma $\hat{C}^\dagger\hat{C} = \mathbf{1}$, otteniamo

$$\begin{aligned} \langle 0|\mathcal{T}[j^\mu(x_1)\dots j^\mu(x_n)]|0\rangle &= \langle 0|\mathcal{T}[\hat{C}^\dagger\hat{C}j^\mu(x_1)\hat{C}^\dagger\hat{C}\dots\hat{C}^\dagger\hat{C}j^\mu(x_n)\hat{C}^\dagger\hat{C}]|0\rangle \\ &= \langle 0|\mathcal{T}[\hat{C}j^\mu(x_1)\hat{C}\dots\hat{C}j^\mu(x_n)\hat{C}]|0\rangle = (-1)^n \langle 0|\mathcal{T}[j^\mu(x_1)\dots j^\mu(x_n)]|0\rangle \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

in cui si è utilizzato il fatto che $j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ prende un meno sotto coniugazione di carica, che $\hat{C}|0\rangle = |0\rangle$ e che $\langle 0|\hat{C}^\dagger = \langle 0|$. La (E.2) mostra come le funzioni di Green di questa forma debbano annullarsi per n dispari; dal punto di vista diagrammatico questo vuol dire che la somma di tutti i diagrammi con

un loop fermionico ed n linee fotoniche esterne al loop sono identicamente nulli perchè dato un diagramma di questo tipo per la simmetria di coniugazione di carica esiste un diagramma in cui le linee fermioniche sono rigirate e questi diagrammi si sommano a zero. In conclusione la somma di tutti i diagrammi in cui compare un loop fermionico con un numero dispari fissato, n , di vertici è identicamente nullo per il teorema di Furry; questa è un'importante semplificazione.

QED.

Appendice F

La gamma e la beta di Eulero

Definiamo e studiamo le funzioni beta e gamma di Eulero.

F.1 La gamma di Eulero

Iniziamo con la gamma di Eulero, definita come

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt; \quad (\text{F.1})$$

la (F.1) è assolutamente convergente per $\text{Re}(z) > 0$. Da notare che $\Gamma(1) = 1$. È possibile tuttavia estendere analiticamente la (F.1) anche nel semipiano negativo utilizzando la seguente

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}, \quad (\text{F.2})$$

ottenuta tramite integrazione per parti della (F.1). Il prolungamento analitico consente la definizione della gamma di Eulero su tutto il piano complesso ad eccezione dei punti $z = 0, -1, -2, \dots$. Dalla (F.2) possiamo scrivere, per $n \in \mathbf{N}$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \dots = n!\Gamma(1) = n!; \quad (\text{F.3})$$

quindi, la gamma di Eulero è una generalizzazione della funzione fattoriale, e può essere calcolata anche per valori seminteri. Un'interessante riscrittura alternativa della gamma è data da

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

la quale rende esplicita la presenza dei poli semplici in $z = -n$ e il valore del residuo pari a $\text{Res}(z = -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$. Le derivate della funzione gamma possono essere calcolate in maniera semplice, infatti (ricordando che $\frac{da^x}{dx} = a^x \ln(a)$)

$$\frac{d^k \Gamma(z)}{dz^k} = \frac{d^k}{dz^k} \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} \frac{d^k t^{z-1}}{dz^k} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} (\ln(t))^k t^{z-1} e^{-t} dt; \quad (\text{F.4})$$

da cui possiamo costruire uno sviluppo di Taylor della gamma (per semplicità ci fermiamo al primo ordine, poichè le cose si complicano rapidamente e parecchio)

$$\Gamma(z + \epsilon) = \Gamma(z) + \Gamma'(z)\epsilon = \Gamma(z) + \Gamma(z)\psi_0(z)\epsilon = \Gamma(z)(1 + \psi_0(z)\epsilon),$$

in cui $\psi_m(z)$ è la funzione poligamma definita come la derivata m -esima della derivata logaritmica della funzione gamma

$$\psi_m(z) := \frac{d^m \Gamma'(z)}{dz^m \Gamma(z)}.$$

Si può mostrare che la funzione digamma (funzione poligamma per $m = 0$) è esprimibile come

$$\psi_0(z) = -\gamma - \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+z} - \frac{1}{k} \right),$$

in cui $\gamma = 0,5772156649\dots$ è la costante di Eulero-Mascheroni (definita come limite della serie armonica troncata a cui è sottratto il logaritmo naturale: $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n))$). Alla luce di tutto ciò, lo sviluppo di Taylor si riscrive come

$$\Gamma(z + \epsilon) = \Gamma(z)(1 + \psi_0(z)\epsilon) = \Gamma(z) \left(1 + \left(-\gamma - \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+z} - \frac{1}{k} \right) \right) \epsilon \right), \quad (\text{F.5})$$

che, ad esempio, per $z = 1$ si riduce a

$$\Gamma(1 + \epsilon) = \Gamma(1)(1 - \gamma)\epsilon = 1 - \gamma\epsilon.$$

Nell'origine la gamma si comporta come $\frac{1}{z} + \text{cost}$, infatti

$$\lim_{z \rightarrow 0} \Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1-\gamma z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} - \gamma. \quad (\text{F.6})$$

La funzione gamma può essere anche sviluppata tramite la formula di Stirling e risulta (valido per $z \rightarrow \infty$ e $|\arg(z)| < \pi$)

$$\Gamma(z) = e^{-z} z^{z-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} + \dots \right]; \quad (\text{F.7})$$

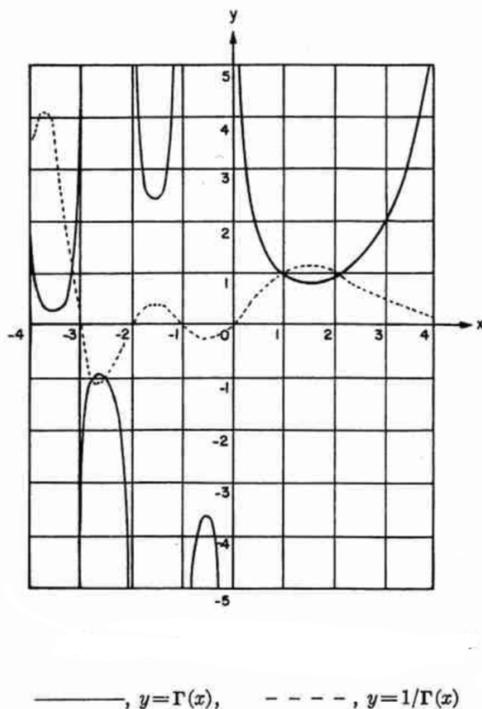


Figura F.1: Grafico della funzione gamma per valori reali; notare i poli situati in $x \in \mathbf{Z}^-$.

F.2 La beta di Eulero

La funzione beta di Eulero è strettamente legata alla funzione gamma, essa è definita come

$$\beta(z, w) := \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt, \quad (\text{F.8})$$

in cui le parti reali sono entrambe positive. La relazione che lega la gamma alla beta è la seguente

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (\text{F.9})$$

e si dimostra partendo dal prodotto di due gamma di Eulero, utilizzando le sostituzioni $u = a^2$ e $v = b^2$ e passando poi in coordinate polari. La derivata rispetto ad una variabile della beta è esprimibile in termini della funzione digamma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta(z, w)}{\partial z} &= \frac{\partial \beta(z, w)}{\partial z} \left(\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \right) = \frac{\Gamma'(z)\Gamma(w)\Gamma(z+w) - \Gamma'(z+w)\Gamma(z)\Gamma(w)}{(\Gamma(z+w))^2} = \\ &= \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} - \frac{\Gamma'(z+w)\Gamma(z)\Gamma(w)}{(\Gamma(z+w))^2} = \beta(z, w) \left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} - \frac{\Gamma'(z+w)}{\Gamma(z+w)} \right) = \beta(z, w) (\psi_0(z) - \psi_0(z+w)). \end{aligned}$$

Appendice G

Dimostrazione $\frac{2-D}{D}I(s, D, 1) = -\frac{2s}{D}I(s, D, 2)$

Prima di tutto notiamo che l'asserzione è equivalente a mostrare che

$$\frac{I(s, D, 1)}{I(s, D, 2)} = -\frac{2s}{2-D}. \quad (\text{G.1})$$

Calcoliamo il rapporto

$$\frac{I(s, D, 1)}{I(s, D, 2)} = \frac{i(-1)^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(1-\frac{D}{2})}{\Gamma(1)} s^{1-\frac{D}{2}}}{i \frac{\pi^{\frac{D}{2}} \Gamma(2-\frac{D}{2})}{\Gamma(2)} s^{2-\frac{D}{2}}} = -\frac{\Gamma(1-\frac{D}{2})}{\Gamma(2-\frac{D}{2})} \frac{s^{2-\frac{D}{2}}}{s^{1-\frac{D}{2}}} = -s \frac{\Gamma(\frac{2-D}{2})}{\Gamma(\frac{4-D}{2})};$$

facciamo, ora, uso della (F.2) per scrivere che

$$\Gamma\left(\frac{4-D}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{2-D}{2} + 1\right) = \frac{2-D}{2} \Gamma\left(\frac{2-D}{2}\right),$$

per cui

$$\frac{I(s, D, 1)}{I(s, D, 2)} = -s \frac{\Gamma(\frac{2-D}{2})}{\Gamma(\frac{4-D}{2})} = -s \frac{\Gamma(\frac{2-D}{2})}{\frac{2-D}{2} \Gamma(\frac{2-D}{2})} = -\frac{2s}{2-D}.$$

QED.

Appendice H

Cenni sui detector per la rivelazione di fotoni

Vogliamo, qui, dare un breve cenno ai detector per la rivelazione dei fotoni. I fotoni interagiscono con la materia in 3 modi differenti (tra parentesi è riportato un rozzo andamento della sezione d'urto in funzione del numero atomico):

- Effetto fotoelettrico ($Z^{\frac{9}{2}}$);
- Effetto Compton (Z);
- Produzione di coppie (Z^2).

Queste tre interazioni dipendono dall'energia del fotone e dal materiale con cui il fotone interagisce (dipende, ad esempio, dal numero atomico del materiale); Nella figura sottostante sono riportate le sezioni d'urto dei tre processi elencati.

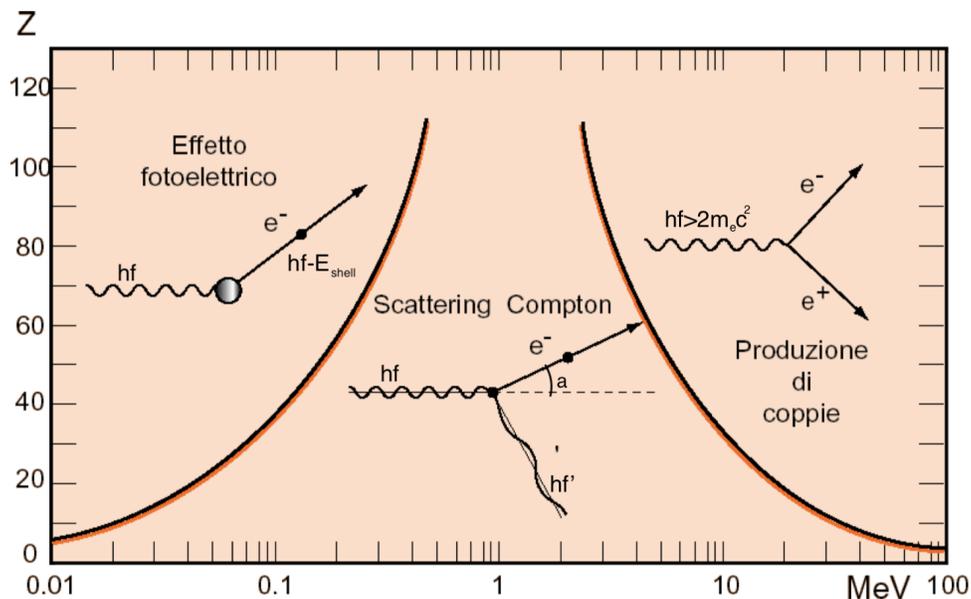


Figura H.1: Andamento delle sezioni d'urto dei processi di interazione fotoni-materia. Nelle regioni in cui è riportato il diagramma è più probabile che avvenga il processo associato. Come si vede per energie sotto gli 0,01 MeV si ha effetto fotoelettrico, mentre per energie maggiori ai 100 MeV si ha produzione di coppie.

Questi tre processi, producono elettroni ed è quindi possibile rilevare il passaggio di fotoni e determinarne l'energia grazie al fatto che gli elettroni ionizzano il materiale del detector, e queste cariche vengono poi

collezionate dal catodo e dall'anodo e convertite in una corrente che ci dà informazioni sull'energia degli elettroni.

Con riferimento ai diagrammi in Figura I.1, il processo di effetto fotoelettrico è l'ideale dato che, per un certo materiale, l'elettrone emesso avrà sempre la stessa energia (se il fascio di fotoni è monocromatico) data da

$$E_{e^-} = hf - E_{shell} \quad (\text{H.1})$$

in cui E_{shell} è l'energia del livello atomico (o molecolare) in cui si trova l'elettrone e f la frequenza del fotone. Se consideriamo la distribuzione differenziale del numero di conteggi in funzione dell'energia, otterremo un qualcosa di simile alla delta di Dirac centrato in $hf - E_{shell}$. Per quanto riguarda l'effetto Compton, si ha a che fare con un elettrone con uno spettro continuo di energie data da

$$E_{e^-} = hf - hf' = hf \left(\frac{\frac{hf}{m_e c^2} (1 - \cos(a))}{1 + \frac{hf}{m_e c^2} (1 - \cos(a))} \right). \quad (\text{H.2})$$

L'energia va da 0 (quando l'angolo di diffusione del fotone è nullo) ad un valore, detto Compton edge, pari a $hf - E_c$ (quando l'angolo di diffusione del fotone è π), in cui si ha

$$E_c = E_{e^-}|_{a=\pi} - h\nu = \frac{hf}{1 + 2\frac{h\nu}{m_e c^2}}. \quad (\text{H.3})$$

Il processo di produzione di coppie può avvenire solo se l'energia del fotone è maggiore dell'energia necessaria per creare una coppia elettrone positrone, ossia $hf > 2m_e c^2$; entrambi, positrone e l'elettrone, faranno ionizzazione e produrranno un picco (nella distribuzione differenziale) attorno ad un valore di energia pari a $hf - 2m_e c^2$.

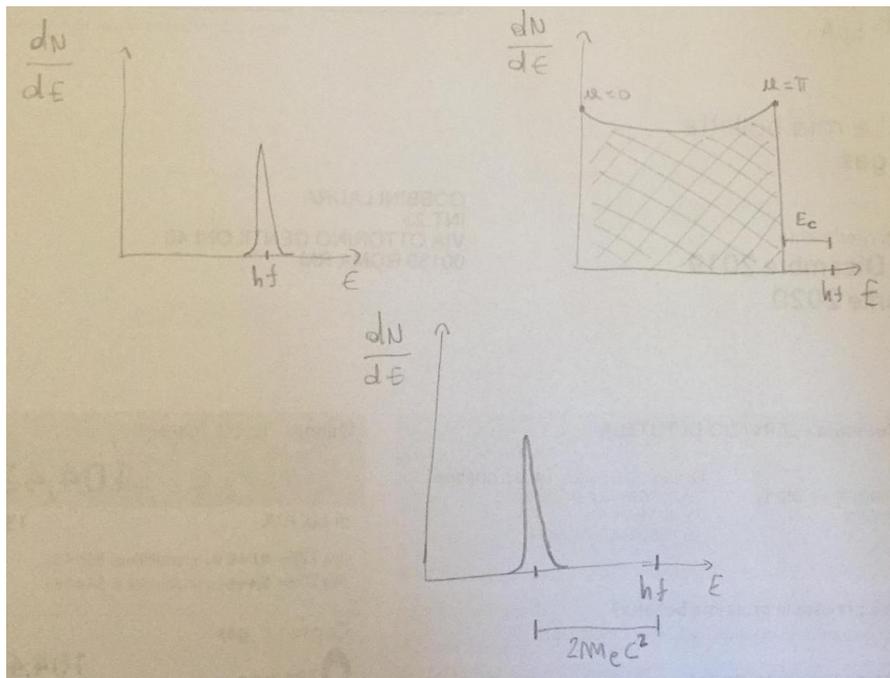


Figura H.2: Grafici abbozzati delle distribuzioni differenziali dei conteggi in funzione dell'energia. In alto a sinistra, effetto fotoelettrico: si ha un picco attorno all'energia del fotone (è stata già sommata l'energia E_{shell}). In alto a destra, effetto Compton: la parte righettata è lo spettro continuo Compton, il Compton edge dista E_c dall'energia del fotone incidente. In basso, produzione di coppie: viene prodotto un picco in corrispondenza del valore di energia $E_{e^+e^-} = hf - 2m_e c^2$.

In un rivelatore di piccole dimensioni è possibile avere tutti e tre i processi, per cui la distribuzione differenziale totale sarà data dall'insieme delle tre distribuzioni differenziali riportate in Figura I.2; nel caso di rivelatore di grandi dimensioni, aspettando un tempo sufficiente, le energie in gioco diminuiranno ed alla fine si avrà solo effetto fotoelettrico e sommando le energie di tutti i fotoelettroni emessi si ottiene l'energia del fotone iniziale.

Appendice I

Decomposizioni di Gordon

Vogliamo, qui, derivare delle importanti relazioni note come decomposizioni di Gordon. Prese le equazioni del moto soddisfatte dagli spinori $\bar{u}(\mathbf{p}', s')$ e $u(\mathbf{p}, s)$,

$$\begin{aligned} p^\mu \gamma_\mu u(\mathbf{p}, s) &= m u(\mathbf{p}, s); \\ \bar{u}(\mathbf{p}', s') \gamma_\mu p'^\mu &= \bar{u}(\mathbf{p}', s') m; \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

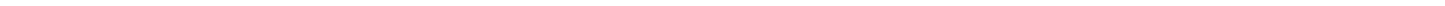
moltiplichiamo la prima per $\bar{u}(\mathbf{p}', s') \gamma_\nu$ e la seconda per $\gamma_\nu u(\mathbf{p}, s)$, così da ottenere rispettivamente

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}', s') \gamma_\nu [(\gamma_\mu p^\mu - m) u(\mathbf{p}, s)] &= \bar{u}(\mathbf{p}', s') [(\gamma_\nu \gamma_\mu p^\mu - \gamma_\nu m) u(\mathbf{p}, s)] = \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}', s') \left(\frac{1}{2} [\gamma_\nu, \gamma_\mu] p^\mu + \frac{1}{2} \{ \gamma_\nu, \gamma_\mu \} p^\mu - \gamma_\nu m \right) u(\mathbf{p}, s) = \bar{u}(\mathbf{p}', s') (-i \sigma_{\mu\nu} p^\mu + \eta_{\mu\nu} p^\mu - \gamma_\nu m) u(\mathbf{p}, s) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{u}(\mathbf{p}', s') (p_\nu - i \sigma_{\mu\nu} p^\mu) \bar{u}(\mathbf{p}', s') = m \bar{u}(\mathbf{p}, s) \gamma_\nu \bar{u}(\mathbf{p}, s); \\ [\bar{u}(\mathbf{p}', s') (\gamma_\mu p'^\mu - m)] \gamma_\nu u(\mathbf{p}, s) &= [\bar{u}(\mathbf{p}', s') (\gamma_\mu \gamma_\nu p'^\mu - \gamma_\nu m)] u(\mathbf{p}, s) = \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}', s') \left(\frac{1}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] p'^\mu + \frac{1}{2} \{ \gamma_\mu, \gamma_\nu \} p'^\mu - \gamma_\nu m \right) u(\mathbf{p}, s) = \bar{u}(\mathbf{p}', s') (-i \sigma_{\nu\mu} p'^\mu + \eta_{\nu\mu} p'^\mu - \gamma_\nu m) u(\mathbf{p}, s) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{u}(\mathbf{p}', s') (p'_\nu + i \sigma_{\mu\nu} p'^\mu) \bar{u}(\mathbf{p}', s') = m \bar{u}(\mathbf{p}, s) \gamma_\nu \bar{u}(\mathbf{p}, s); \end{aligned}$$

notare che nell'ultimo passaggio della seconda equazione si è sfruttata l'antisimmetria del commutatore. Sommiamo e sottraiamo le due equazioni, così da poter scrivere

$$\begin{aligned} \text{Somma} &\Rightarrow \bar{u}(\mathbf{p}', s') [(p_\nu + p'_\nu) + i \sigma_{\mu\nu} (p'^\mu - p^\mu)] u(\mathbf{p}, s) = 2m \bar{u}(\mathbf{p}, s) \gamma_\nu \bar{u}(\mathbf{p}, s); \\ \text{Differenza} &\Rightarrow \bar{u}(\mathbf{p}', s') [(p_\nu - p'_\nu) - i \sigma_{\mu\nu} (p'^\mu + p^\mu)] u(\mathbf{p}, s) = 0. \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

Le equazioni (J.2) sono dette decomposizioni di Gordon (anche se solo la prima è propriamente detta così) e ci mostrano che solo alcune delle combinazioni espresse nel paragrafo 9.3.1 sono indipendenti (le uniche indipendenti sono quelle che compaiono nella prima equazione del paragrafo 9.3.1).



Appendice J

I fattori di forma elettromagnetici

I fattori di forma sono delle funzioni che rappresentano la trasformata di Fourier della distribuzione di carica elettrica (fattore di forma elettrico $F_E(q^2)$) e della distribuzione di corrente (fattore di forma magnetico $F_M(q^2)$). I fattori di forma sono importanti perchè essi permettono di scrivere

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{carica distribuita}} = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{carica puntiforme}} |F_E(q^2)|^2. \quad (\text{J.1})$$

Consideriamo il fattore di forma elettrico di un oggetto con distribuzione di carica a simmetria sferica

$$\begin{aligned} F_E(q^2) &= \frac{1}{Z_e} \int \rho(r) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \frac{1}{Z_e} \int \rho(r) e^{iqr\cos(\theta)} r^2 dr d\Omega \simeq \frac{1}{Z_e} \int \rho(r) \left(1 + iqr\cos(\theta) - \frac{1}{2}q^2 r^2 \cos^2(\theta) \right) r^2 dr d\Omega = \\ &= \frac{1}{Z_e} \left[\int \rho(r) r^2 dr d\Omega + iq \int \rho(r) r^3 \cos(\theta) dr d\Omega - \frac{q^2}{2} \int \rho(r) r^4 \cos^2(\theta) dr d\Omega \right] = \\ &= \frac{1}{Z_e} \left[Z_e + iq \int \rho(r) r^3 dr \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\phi - \frac{q^2}{2} \int \rho(r) r^4 dr \int \cos^2(\theta) d\Omega \right] = \\ &= \frac{1}{Z_e} \left[Z_e - \frac{q^2}{2} Z_e \frac{\langle r^2 \rangle}{4\pi} 2\pi \int_0^\pi \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta \right] = \frac{1}{Z_e} \left[Z_e - \frac{q^2}{2} Z_e \frac{\langle r^2 \rangle}{4\pi} 2\pi \frac{1}{3} (-\cos^3(\theta)) \Big|_0^\pi \right] = \\ &= \frac{1}{Z_e} \left[Z_e - \frac{q^2}{2} Z_e \frac{4\pi \langle r^2 \rangle}{12\pi} \right] = \frac{1}{Z_e} \left[Z_e - \frac{q^2}{6} Z_e \langle r^2 \rangle \right] = 1 - \frac{q^2 \langle r^2 \rangle}{6}, \end{aligned}$$

in cui nel sesto passaggio si è notato che il secondo addendo è nullo (per via dell'integrale sulla variabile θ) e si è definito il raggio quadratico medio come $\langle r^2 \rangle = \frac{\int \rho(r) r^2 dr}{\int \rho(r) dr} = \frac{4\pi}{Z_e} \int \rho(r) r^4 dr$. Se ora sviluppassimo il fattore di forma in potenze di q^2 (quindi per piccoli impulsi) otterremmo

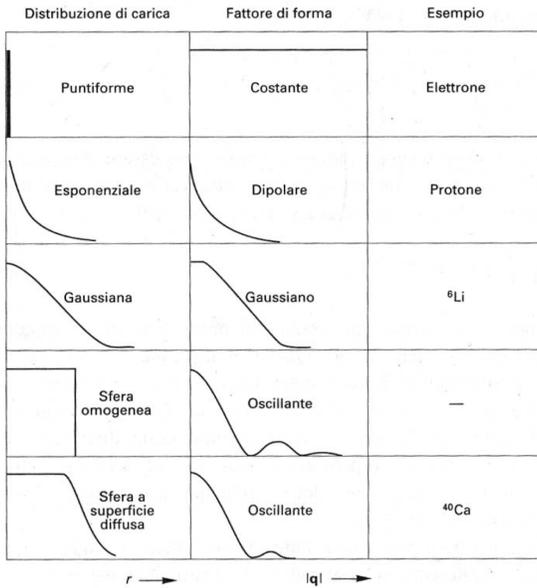
$$F_E(q^2) \simeq F_E(0) + \frac{\partial F_E(q^2)}{\partial q^2} q^2 = 1 - \frac{q^2 \langle r^2 \rangle}{6}$$

da cui otteniamo

$$F_E(0) = 1, \quad \langle r^2 \rangle = -6 \frac{\partial F_E(q^2)}{\partial q^2}. \quad (\text{J.2})$$

La (K.2) ci fornisce una relazione tra i fattori di forma e il raggio quadratico medio, ed è il modo in cui si misurano i raggi delle particelle, dei nuclei, e degli atomi. Misurando (e parametrizzando in funzione di q^2 , differenza tra il momento uscente ed entrante della particella proiettile) i fattori di forma tramite scattering sui corpi a cui si è interessati possiamo ricavare il raggio quadratico medio tramite la (K.2). È importante sottolineare che, in generale, la quantità $R' = \sqrt{\langle r^2 \rangle}$ non corrisponde al raggio fisico ma

a qualcosa di direttamente proporzionale; ad esempio, nel caso di distribuzione di carica perfettamente sferica si ha $R' = \sqrt{\frac{3}{5}}R$, in cui R è il raggio fisico. Di seguito sono riportati alcuni andamenti dei fattori di forma.



Distribuzione di Carica $f(r)$	Fattore di Forma $F(q^2)$
Puntiforme $\delta(r)/4\pi$	1 Costante
Esponenziale $(a^3/8\pi) \cdot \exp(-ar)$	$(1 + q^2/a^2\hbar^2)^{-2}$ Dipolare
Gaussiana $(a^2/2\pi)^{3/2} \cdot \exp(-a^2r^2/2)$	$\exp(-q^2/2a^2\hbar^2)$ Gaussiano
Sfera omogenea $\begin{cases} 3/4\pi R^3 & \text{per } r \leq R \\ 0 & \text{per } r > R \end{cases}$	$3\alpha^{-3}(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$ Oscillante con $\alpha = q R/\hbar$

Figura J.1: Esempi di fattori di forma derivanti da alcune distribuzioni di carica importanti.

Appendice K

Calcolo dell'integrale nella variabile q_E dell'equazione (9.30)

L'integrale da calcolare è

$$I_1 + I_2 = \int_0^\infty q_E^3 \left[\frac{1}{(q_E^2 + xk^2(1-x) - m^2x + i\epsilon)^2} - \frac{1}{(q_E^2 + xk^2(1-x) - m^2x - \mu^2(1-x) + i\epsilon)^2} \right] dq_E;$$

poniamo $a = xk^2(1-x) - m^2x + i\epsilon$ e $b = -\mu^2(1-x)$ per cui possiamo scrivere il nostro integrale come

$$I_1 + I_2 = \int_0^\infty q_E^3 \left[\frac{1}{(q_E^2 + a)^2} - \frac{1}{(q_E^2 + a + b)^2} \right] dq_E = \int_0^\infty q_E^3 \left[\frac{1}{(q_E^2 + a)^2} - \frac{1}{(q_E^2 + c)^2} \right] dq_E, \quad (\text{K.1})$$

in cui si è posto $c = a + b$. Possiamo concentrarci su un singolo addendo dato che, a parte il valore delle costanti, i due sono uguali; per cui considerando il singolo integrale indefinito

$$I_1 = \int \frac{q_E^3}{(q_E^2 + a)^2} dq_E = \frac{1}{2} \int \frac{u}{(u + a)^2} du = \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{(u + a)} - \frac{a}{(u + a)^2} \right] du,$$

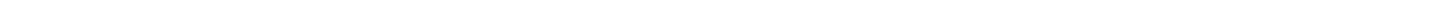
nel primo passaggio si è usato il cambio di variabile $u = x^2$ e nel secondo si è diviso in fratti semplici; integrando si ha

$$I_1 = \frac{1}{2} \left[\ln(u + a) + \frac{a}{(u + a)} \right] + \text{cost} = \frac{1}{2} \left[\ln(x^2 + a) + \frac{a}{(x^2 + a)} \right] + \text{cost}.$$

Tornando alla (L.1) abbiamo

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \frac{1}{2} \left[\ln(x^2 + a) + \frac{a}{(x^2 + a)} - \ln(x^2 + c) - \frac{c}{(x^2 + c)} \right] \Big|_0^\infty = \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{x^2 + a}{x^2 + c}\right) + \frac{a}{(x^2 + a)} - \frac{c}{(x^2 + c)} \right] \Big|_0^\infty = \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{x^2 + a}{x^2 + a + b}\right) + \frac{a}{(x^2 + a)} - \frac{a + b}{(x^2 + a + b)} \right] \Big|_0^\infty = \\ &= -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{a}{a + b}\right). \end{aligned}$$

QED.



Appendice L

Formalismo funzionale per gli oscillatori

Oscillatore armonico in MQ

Vediamo come si applica il formalismo funzionale al caso degli oscillatori in meccanica quantistica. Consideriamo la lagrangiana di un oscillatore armonico

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q})^2 - \omega^2 q^2 \Rightarrow S = -\frac{1}{2} \int dt q \hat{O} q, \quad (\text{L.1})$$

in cui $O = \partial_t^2 + \omega^2$ e si è sfruttata un'integrazione per parti per riscrivere l'azione. Procedendo in maniera del tutto analoga al caso del campo scalare nella sezione 1.2.1 troviamo che il funzionale generatore si scrive come

$$Z[J] = c e^{\frac{i}{2} \int dt J(x) \hat{O}^{-1} J(x)},$$

in cui il nucleo dell'operatore integrale è dato da

$$\text{Ker}(\hat{O}^{-1}) = \frac{1}{E^2 - \omega^2}. \quad (\text{L.2})$$

Eseguendo l'antitrasformata e supponendo $t_1 > t_2$ si ottiene il propagatore a due punti

$$\langle 0|q(t_1)q(t_2)|0 \rangle = \frac{1}{2\omega} e^{-i\omega(t_1-t_2)}, \quad (\text{L.3})$$

ma potendo scrivere

$$\langle 0|q(t_1)q(t_2)|0 \rangle = \sum_i \langle 0|q(t_1)|i \rangle \langle i|q(t_2)|0 \rangle,$$

otteniamo che

$$\langle 0|q(t_1)|i \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega t_1},$$

ossia l'esistenza di uno stato eccitato con energia $E_1 = E_0 + \omega$.

Somma su cammini per i due oscillatori

Nella breve sezione precedente abbiamo visto il formalismo funzionale applicato al caso dell'oscillatore bosonico nel linguaggio delle $q(t)$, ora vogliamo svilupparlo nel linguaggio degli operatori \hat{a} e \hat{a}^\dagger andando a considerare le differenze tra l'oscillatore bosonico e quello di Fermi.

Definiamo il funzionale generatore

$$Z[\mathbf{J}] = \int da(t) da^\dagger(t) e^{i \int dt a^\dagger(t) \hat{D} a(t) - J^\dagger(t) a(t) - a^\dagger(t) J(t)},$$

in cui si ha $\hat{D} = i\partial_t - \omega$; poichè in ogni caso l'azione è una variabile ordinaria si deve avere che nel caso fermionico le sorgenti siano variabili di Grassman. Con passaggi analoghi al caso del campo di Dirac si ottiene

$$Z[\mathbf{J}] = e^{-i\iint dt dt' J^\dagger(t') S(t-t') J(t)}, \quad (\text{L.4})$$

in cui $S(t-t')$ è il propagatore definito dalla relazione

$$DS(t) = \delta(t) \Rightarrow \dot{S}(t) = i\omega S(t) - i\delta(t) \Rightarrow S(t) = -i\theta(t)e^{-i\omega t} \quad (\text{L.5})$$

in cui la soluzione dell'equazione omogenea deve essere nulla per via delle condizioni imposte sull'integrale funzionale.

Per notare le differenze tra il caso di variabili fermioniche e bosoniche calcoliamo la funzione di Green a 4 punti $\langle 0|\mathcal{T}[a(t_1)a(t_2)a^\dagger(\tau_1)a^\dagger(\tau_2)]|0\rangle$ nel caso $t_1 > t_2 > \tau_1 > \tau_2$:

$$\begin{aligned} \langle 0|a(t_1)a(t_2)a^\dagger(\tau_1)a^\dagger(\tau_2)|0\rangle &= \frac{\delta}{\delta J^\dagger(t_1)} \frac{\delta}{\delta J^\dagger(t_2)} \frac{\delta}{\delta J(\tau_1)} \frac{\delta}{\delta J(\tau_2)} Z[\mathbf{J}] = \\ &= \frac{\delta}{\delta J^\dagger(t_1)} \frac{\delta}{\delta J^\dagger(t_2)} e^{-i\iint dt dt' J^\dagger(t') S(t'-t) J(t)} \left(\mp i \int dt' J^\dagger(t') S(t'-\tau_1) \right) \left(\mp i \int dt' J^\dagger(t') S(t'-\tau_2) \right) = \\ &= - \left(S(t_2 - \tau_1) S(t_1 - \tau_2) \pm S(t_1 - \tau_1) S(t_2 - \tau_2) \right) = \quad (\text{L.6}) \\ &= - \left[\left(-ie^{-i\omega(t_2-\tau_1)} \right) \left(-ie^{-i\omega(t_1-\tau_2)} \right) \pm \left(-ie^{-i\omega(t_1-\tau_1)} \right) \left(-ie^{-i\omega(t_2-\tau_2)} \right) \right] = \\ &= e^{-i\omega(t_1+t_2-\tau_1-\tau_2)} (1 \pm 1) = \begin{cases} 0 & (\text{fermionico}) \\ 2e^{-i\omega(t_1+t_2-\tau_1-\tau_2)} & (\text{bosonico}) \end{cases} ; \end{aligned}$$

per cui l'oscillatore fermionico non possiede un secondo stato eccitato (ed è corretto stando al principio di esclusione di Pauli) mentre l'oscillatore bosonico lo possiede.

Bibliografia

- [1] Stefania de Curtis Andrea Cappelli. *Appunti di teoria quantistica dei campi: le funzioni di Wightman e le funzioni di Schwinger*. Firenze: Teoria dei campi II, Dipartimento di Fisica, 2010.
- [2] Emil Artin. *The gamma function*. New York: Doverpublications, 2015.
- [3] Carlo Dionisi. *Appunti del corso di fisica nucleare e subnucleare*. Roma, 2008.
- [4] Eduardo Fradkin. *General field theory course 582, Chapter 9, "Quantization of Gauge Theories"*. Illinois: Univerity of Illinois, Departement of Physics, 2019.
- [5] Glenn Knoll. *Radiation detection and measurement*. Michigan: Jonh Wiley.
- [6] Daniel Schroeder Michael Peskin. *An introduction to quantum field theory*. Boca Raton: CRC Press, Taylor Francis group, 1995.
- [7] Irene Stegun Milton Abramowitz. *Handbook of mathematical functions*. USA: United States Department of Commerce, 1972.
- [8] Omar Benhar Nicola Cabibbo Luciano Maiani. *Introduzione alle teorie di gauge*. Roma: Editori Riuniti University Press, 2016.
- [9] Omar Benhar Nicola Cabibbo Luciano Maiani. *Meccanica quantistica relativistica*. Roma: Editori Riuniti University Press, 2016.
- [10] Mark Srednicki. *Quantum field theory*. New york: Cambridge University Press, 2007.
- [11] Joachim Reinhardt Walter Greiner. *Quantum electrodynamics*. Thun: Springer, 1994.
- [12] Steven Weinberg. *The quantum theory of fields Volume 1*. United Kingdom: Cambridge University Press, 2010.